

**МЧС России
Санкт-Петербургский университет
Государственной противопожарной службы**

М.И. Антипин

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
ДЛЯ СЛУШАТЕЛЕЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ
280705 «ПОЖАРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ»**

Санкт-Петербург 2011

МЧС России
Санкт-Петербургский университет
Государственной противопожарной службы
Сибирский институт пожарной безопасности

М.И. Антипин

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
ДЛЯ СЛУШАТЕЛЕЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ
280705 «ПОЖАРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Под общей редакцией
Владимира Сергеевича Артамонова
доктора военных наук, доктора технических наук, профессора,
заслуженного работника высшей школы Российской Федерации,
лауреата премии Правительства Российской Федерации
в области науки и техники
В. С. Артамонова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2011

УДК _____
ББК _____
Авторский знак

Под общей редакцией доктора военных наук, доктора
технических наук, профессора, академика,
заслуженного работника высшей школы Российской Федерации
В. С. Артамонова

Р е ц е н з е н т ы:
доктор технических наук
ОАО «Информационные спутниковые системы
имени академика М.Ф. Решетнева»
А. К. Шатров;
доктор технических наук, доцент
Сибирский институт пожарной безопасности
Санкт-Петербургского университета ГПС МЧС России
А.А. Носенков

Антипин М. И.

Авт. знак Учебно-методическое пособие. Прикладная механика. Методические рекомендации к выполнению контрольной работы для слушателей по направлению подготовки 280705 «Пожарная безопасность»/ М. И. Антипин; Под общ. ред. В. С. Артамонова. – СПб.: Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, 2011. – 66 с.

В учебно-методическом пособии, подготовленном в соответствии с учебной программой по дисциплине и предназначенном для слушателей заочного обучения, представлены методические рекомендации к выполнению контрольной работы по курсу «Прикладная механика». В пособии даны варианты заданий контрольной работы, порядок и методика решения задач. Приведенные в тексте методические рекомендации решения практических задач дают слушателям представление об условиях равновесия и движения материальных тел, основных методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость.

УДК _____
ББК _____

ISBN _ - _ - _ - _

© Антипин М.И., 2011

© Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, 2011

Содержание

Введение.....	4
Основные методические указания.....	5
Задания к контрольной работе.....	15
Примеры решения задач контрольной работы.....	32
Список литературы.....	65

Введение

Дисциплина «Прикладная механика» относится к базовой части профессионального цикла. Целью освоения дисциплины является выработка навыков использования методов расчетов элементов технологического оборудования по критериям работоспособности и надежности.

Прикладной характер учебной дисциплины обуславливается практической направленностью на решение задач пожарной безопасности. Данная дисциплина является основой для изучения дисциплин профессионального цикла «Детали машин», «Здания, сооружения и их устойчивость при пожаре», «Пожарная техника».

В процессе изучения дисциплины у слушателя формируются общекультурные и профессиональные компетенции.

Для оценки знаний основ механики недеформируемого и деформируемого твердых тел, условий равновесия твердых тел и конструкций, способов задания движения точки, видов движения твердого тела, динамических характеристик материальных тел, основных видов деформаций, а также умений применять основные методики расчетов на прочность и жесткость типовых элементов конструкций, определять реакции опор и связей, определять центр тяжести простейших тел, определять скорости и ускорения точек твердого тела, составлять и решать простейшие дифференциальные уравнения движения материальной точки и твердого тела, слушатели выполняют контрольную работу состоящую из девяти задач.

Основные методические указания

Процесс получения знаний по курсу «Прикладная механика» слушателями складывается из самостоятельного изучения разделов курса по учебникам с составлением конспектов, разбора и решения задач, приведённых в сборниках задач (как правило, в задачниках имеются рекомендации по решению или примеры решения; наряду с этим, в конце каждой главы учебника приводятся характерные для изучаемой темы задачи с подробным описанием их решения). В случае затруднений при освоении материала слушатель может получить, в зависимости от возможности, письменную или устную консультацию.

Выполнение предлагаемых контрольных заданий позволяет слушателю закрепить и систематизировать самостоятельно освоенный материал. Задание представляет собой совокупность типовых задач (в ряде случаев взаимосвязанных), соответствующих изучаемым разделам дисциплины.

К содержанию контрольной работы предъявляются следующие требования:

– схему и данные к задачам слушатель должен взять из таблиц в строгом соответствии со своим личным шифром:

последние три цифры шифра последовательно записываются дважды в одну строчку, а под ними располагаются первые 6 букв русского алфавита.

Например, шифр слушателя группы ВК - 08068

цифры	–	0	6	8	0	6	8
буквы	–	а	б	в	г	д	е

Из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного снизу соответствующей буквой, надо взять только одно число, стоящее в горизонтальной строке с таким же номером, как у буквы. Например, букве «в» соответствует номер «8».

Так приведённому шифру соответствуют следующие данные:

– для первой задачи (рис.1, табл.1):

расчетная схема – 6 (буква «б» - цифра «6»)

номер условия – 8 (буква «в» - цифра «8»)

– для четвертой задачи (рис.4, табл.4):

схема – 8 (буква «е» - цифра «8»)

на схеме отсутствует

швеллер – (буква «в» - цифра «8»)

двутавр – 16 (буква «е» - цифра «8»)

прямоугольник $h = 18$ см (буква «д» - цифра «6»)

$b = 0,8$ см (буква «г» - цифра «0»)

Остальные данные – общие для всех вариантов – приведены в тексте задачи.

К оформлению контрольной работы предъявляются следующие требования:

– **контрольная работа выполняется чернилами, чётким почерком в тетради с полями 3 см** для замечаний рецензента;

– на обложке тетради необходимо указать фамилию, имя и отчество слушателя, название факультета и специальность, учебный шифр, номер зачетной книжки, адрес места проживания;

– перед решением задачи надо полностью выписать её условие с численными данными и составить аккуратный эскиз, на котором указать в числах все величины, используемые при расчёте;

– решение должно сопровождаться краткими последовательными объяснениями, необходимо проставить размерности всех величин и подчеркнуть окончательные результаты.

В случае невыполнения, какого-либо из требований первой или второй группы контрольная работа слушателя не принимается на рецензирование.

При наличии ошибок допускаются исправления на отдельных листах, которые должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы. После устранения ошибок производится собеседование по материалу контрольной работы.

Перед выполнением контрольной работы слушатель обязан изучить следующие вопросы:

Раздел 1. Теоретическая механика

1. Основные понятия и определения статики. Аксиомы статики.
2. Связи и реакции связей. Сходящаяся система сил.
3. Момент силы относительно точки и оси. Пара сил. Теоремы о парах.
4. Приведение системы пар к простейшему виду. Условие равновесия системы пар.
5. Пространственная система сил. Теорема о параллельном переносе сил (метод Пуансо).
6. Приведение системы сил к произвольно выбранному центру (основная теорема статики). Аналитические условия равновесия произвольной системы сил.
7. Система сил, произвольно расположенных на плоскости. Условие равновесия плоской системы сил.
8. Равновесие твердого тела. Два типа задач статики. Статически определимые и неопределимые задачи. Процесс решения задач статики.
9. Равновесие системы тел. Внешние и внутренние связи. Два способа решения задач на равновесие системы тел.
10. Ферма. Расчет ферм. Метод вырезания узлов. Метод Риттера.

11. Трение. Сцепление и трение скольжения. Трение нити о цилиндрическую поверхность.
12. Трение качения. Равновесие сил с учетом сцепления (трения покоя).
13. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела и его координаты.
14. Центр тяжести плоской фигуры. Центры тяжести простых геометрических фигур.
15. Вектор скорости точки. Вектор ускорения точки. Скорость и ускорение точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения.
16. Касательное и нормальное ускорения точки. Взаимосвязь между способами задания движения.
17. Основные движения твердого тела: поступательное, вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.
18. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Разложение движения тела на поступательное и вращательное движения вокруг полюса. Способы задания движения. Уравнения движения.
19. Скорости точек тела. Мгновенный центр скоростей. Ускорения точек тела при плоском движении.
20. Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. Теорема о сложении скоростей.
21. Сложное движение точки. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) при сложном движении.
22. Предмет, задачи и основные законы динамики. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Две задачи динамики. Динамика относительного движения материальной точки.

23. Механическая система. Силы внешние и внутренние. Масса системы. Центр масс. Моменты инерции. Теорема Гюйгенса. Моменты инерции однородных тел.

24. Свободные колебания без учета сил сопротивления. Математический маятник и его малые колебания. Свободные колебания при вязком сопротивлении.

25. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления. Вынужденные колебания при вязком сопротивлении.

26. Дифференциальные уравнения движения системы. Количество движения материальной точки и материальной системы. Теорема об изменении количества движения материальной системы.

27. Количество движения материальной точки и материальной системы. Теорема о движении центра масс.

28. Моменты количества движения материальной точки относительно центра и оси. Теорема об изменении момента количества движения.

29. Кинетическая энергия материальной точки и материальной системы. Мощность и работа силы. Теорема об изменении кинетической энергии.

30. Принцип Даламбера. Принцип возможных перемещений.

31. Связи и их уравнения. Обобщенные координаты. Обобщенные силы.

32. Общее уравнение динамики. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа второго рода.

33. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Потенциальная энергия. Условие равновесия консервативной механической системы. Понятие об устойчивости равновесия.

34. Явление удара. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе. Коэффициент восстановления. Удар шара о неподвижную поверхность.

35. Прямой центральный удар двух движущихся тел. Удар по вращающемуся телу.

Раздел 2. Теория механизмов и машин

1. Основные понятия и определения теории механизмов и машин. Основные виды механизмов.

2. Структура механизмов. Кинематическая пара и кинематическая цепь. Степень подвижности кинематической пары.

3. Структурный анализ и синтез механизмов. Структурная классификация механизмов по Ассуру и по Артоболевскому.

4. Задачи и методы кинематического анализа. Методы кинематического анализа: графический, аналитический, графоаналитический.

5. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев плоского механизма методом планов.

6. Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма методом планов.

7. Определение скоростей точек плоского механизма методом диаграмм.

8. Определение ускорений точек плоского механизма методом диаграмм.

9. Цели и задачи динамического анализа. Силы в механизмах и машинах. Классификация сил. Трение в механизмах.

10. Кинетостатический расчет плоских механизмов. Построение плана сил для определения реакций кинематических пар плоского рычажного механизма.

11. Колебания в рычажных и кулачковых механизмах. Уравновешивание механизмов.

12. Вибрация в механизмах. Общие сведения о вибрации. Источники колебаний и объекты виброзащиты.

13. Основные методы виброзащиты. Снижение виброактивности источника. Изменение конструкции объекта.

14. Основные методы виброзащиты. Динамическое гашение колебаний. Виброизоляция. Виброзащитные устройства и их эффективность.

15. Динамика приводов. Электропривод механизмов. Гидропривод. Пневмопривод. Выбор типа приводов. Передача работы (мощности). Коэффициент полезного действия механизма.

16. Этапы синтеза механизмов. Входные и выходные параметры синтеза. Основные и дополнительные условия синтеза. Целевые функции. Ограничения.

17. Методы оптимизации в синтезе механизмов с применением ЭВМ. Синтез механизмов по методу приближения.

18. Цилиндрическая зубчатая передача (синтез передачи).

19. Синтез планетарных механизмов.

20. Определение основных размеров кулачковых механизмов. Определение профиля кулачка.

Раздел 3. Сопротивление материалов

1. Сопротивление материалов. Основные задачи предмета. Гипотезы, применяемые в сопротивлении материалов.

2. Внутренние силовые факторы. Метод сечения. Эпюры внутренних силовых факторов. Правило знаков

3. Напряжения. Основные понятия и определения. Полное, нормальное и касательное.

4. Внешние нагрузки. Типы опорных устройств и опорные реакции. Виды деформаций. Понятие о деформациях и перемещениях.

5. Основы теории напряженного состояния. Виды напряженного состояния. Определение напряжений в наклонных площадках при линейном напряженном состоянии. Закон парности касательных напряжений.
6. Плоское напряженное состояние. Обратная и прямая задачи.
7. Плоское напряженное состояние. Определение главных напряжений и главных площадок
8. Определение напряжений в наклонных площадках при плоском напряженном состоянии.
9. Обобщенный закон Гука. Определение линейных деформаций при объемном напряженном состоянии.
10. Критерии прочности. 1 и 2, 3 и 4 теории прочности.
11. Геометрические характеристики плоских сечений. Их применение. Статический момент. Определение центра тяжести.
12. Моменты инерции сечений. Связь полярного и осевых моментов инерции. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, при повороте осей.
13. Моменты инерции простых фигур. Моменты инерции прямоугольного сечения (вывод).
14. Главные оси и главные моменты инерции. Определение главных моментов инерции сложного сечения.
15. Растяжение, сжатие. Напряжения. Деформации. Закон Гука при растяжении (сжатии). Условие прочности. Три задачи, решаемые из условия прочности.
16. Механические испытания материалов. Определение физико-механических характеристик при растяжении. Диаграмма растяжения для пластичного материала. Наклеп.
17. Диаграмма растяжения различных материалов. Сравнение свойств пластичных и хрупких материалов при растяжении.
18. Испытание на сжатие.

19. Коэффициент запаса прочности. Выбор допускаемых напряжений.
20. Статически неопределимые системы. Температурные и монтажные напряжения в статически неопределимых стержневых системах.
21. Сдвиг. Напряжения. Деформации при сдвиге. Понятие о смятии.
22. Расчет соединений, работающих на сдвиг. Сварные соединения. Виды соединений. Расчеты на прочность.
23. Кручение. Построение эпюр. Напряжения. Деформации. Условие прочности. Три задачи, решаемые из условия прочности.
24. Расчет вала круглого сечения на прочность, жесткость при кручении.
25. Изгиб. Общие понятия и определения. Построение эпюр в балках. Дифференциальная зависимость между M , Q , q . Контроль правильности построения эпюр.
26. Чистый изгиб. Определение напряжений (вывод). Рациональные формы сечений балок.
27. Касательные напряжения при изгибе. Распределение касательных напряжений по сечениям балки прямоугольного и двутаврового сечения.
28. Условия прочности при изгибе. Три задачи, решаемые из условия прочности.
29. Определение перемещений при изгибе. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
30. Определение перемещений методом начальных параметров.
31. Сложное сопротивление. Совместное действие изгиба и кручения.
32. Косой изгиб. Напряжения. Условия прочности. Нулевая линия.
33. Внецентренное сжатие. Напряжения. Нейтральная линия. Ядро сечения. Примеры построения ядра сечения. Условие прочности.
34. Устойчивые и неустойчивые формы равновесия. Устойчивость сжатых стержней. Определение критической силы. Формула Эйлера.

35. Влияние закрепления на критическую силу. Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского. Коэффициент запаса прочности.

36. Понятие о выборе материала и формы сечения стержней, работающих на устойчивость.

37. Продольно-поперечный изгиб. Энергетический метод определения нагрузок.

38. Расчет безмоментных оболочек вращения.

39. Расчет элементов конструкций при постоянных ускорениях.

40. Внецентренный удар. Диаграммы растяжения материала при динамической нагрузке. Удельная ударная вязкость.

41. Ударные нагрузки. Виды напряжения. Деформации.

42. Явление усталости. Понятие о явлении образования и развития усталостной трещины.

43. Характеристики циклов при переменных напряжениях. Кривая устойчивости при симметричном цикле.

44. Предел выносливости. Факторы, влияющие на предел выносливости.

45. Определение коэффициента запаса прочности при симметричном цикле.

46. Влияние степени асимметрии цикла на сопротивление усталостному разрушению. Влияние концентрации напряжений и масштабного фактора на сопротивление усталостному разрушению.

47. Расчет на прочность при нерегулярной переменной нагруженности.

48. Расчет на прочность при колебаниях. Колебания упругих систем с одной степенью свободы.

Задания к контрольной работе

Задача 1.

Жесткая рама (рис.1, табл. 1) закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущим на конце груз весом $P = 25 \text{ кН}$. На раму действует пара сил с моментом $M = 60 \text{ кНм}$ и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действуют сила F_2 под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D , и сила F_3 под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке E и т. д.).

Определить реакции связей в точках A , B , вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,5 \text{ м}$.

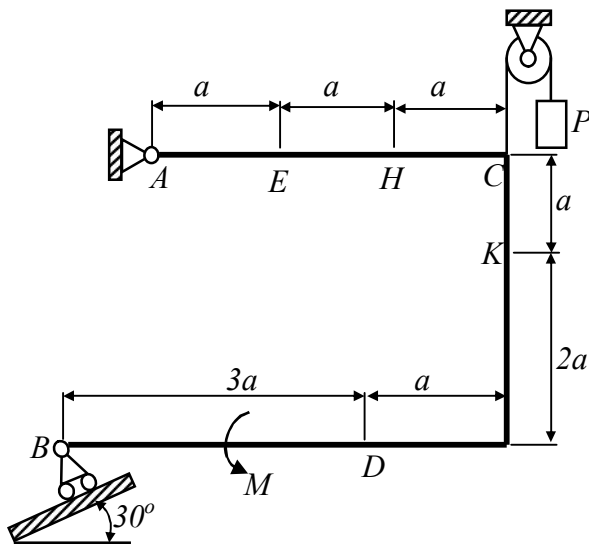


Схема 0

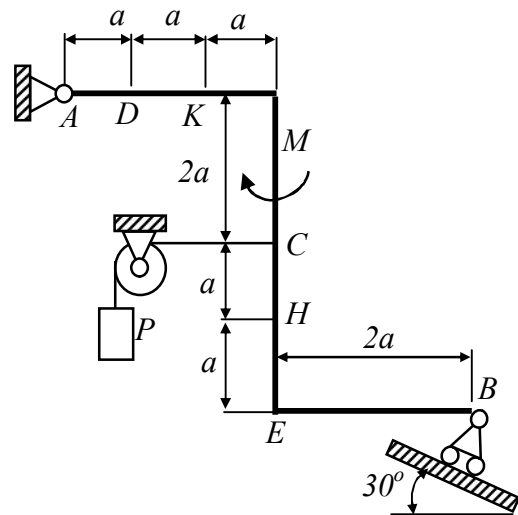


Схема 1

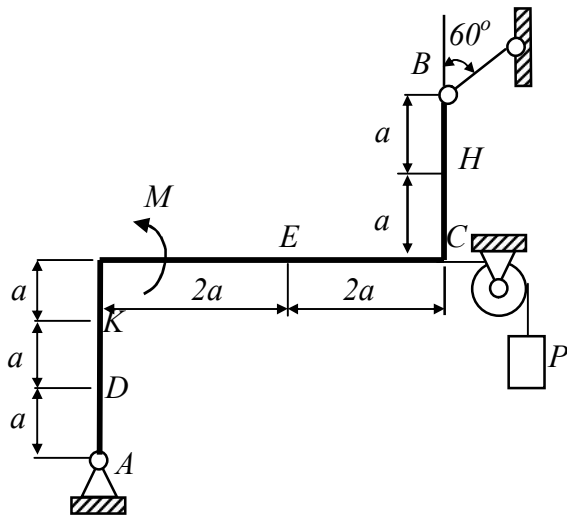


Схема 2

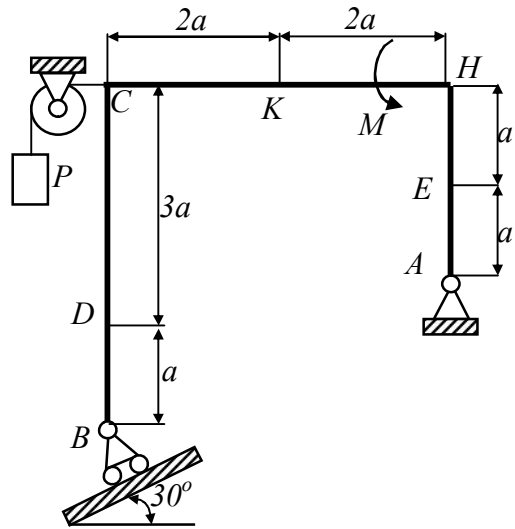


Схема 3

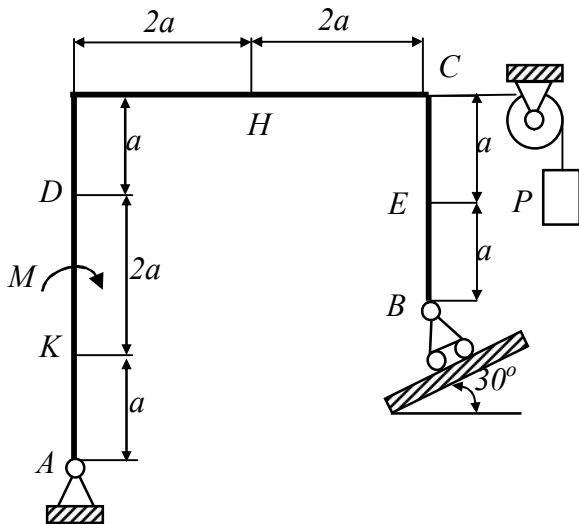


Схема 4

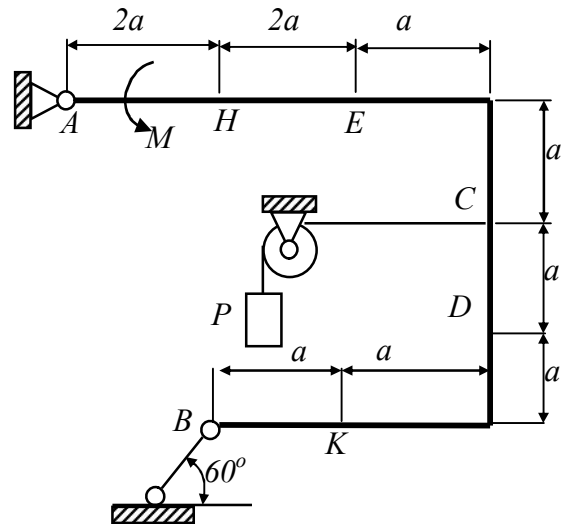


Схема 5

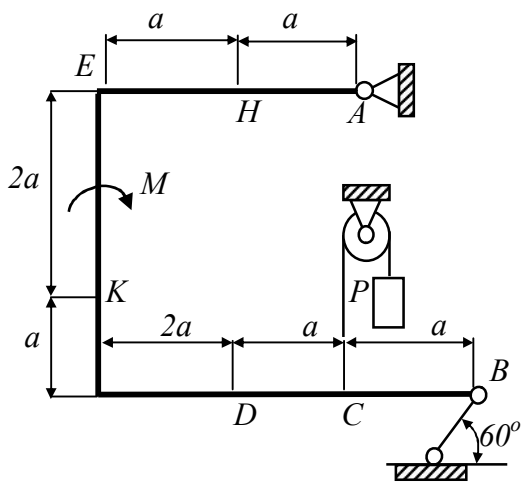


Схема 6

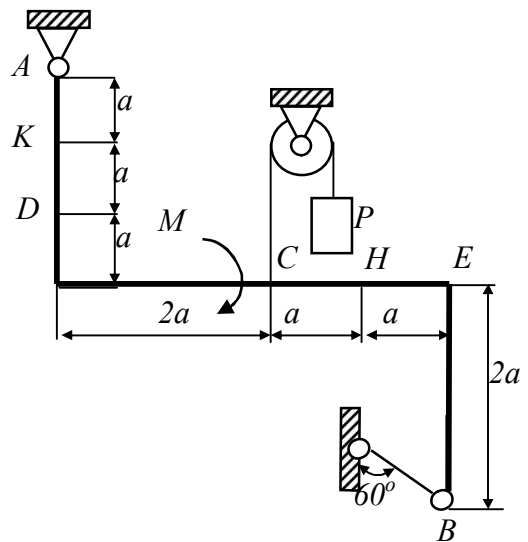


Схема 7

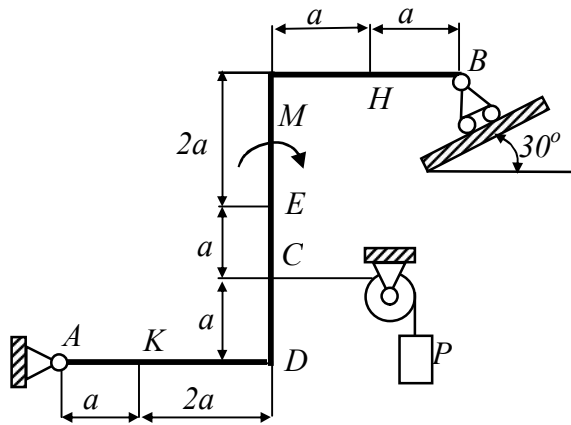


Схема 8

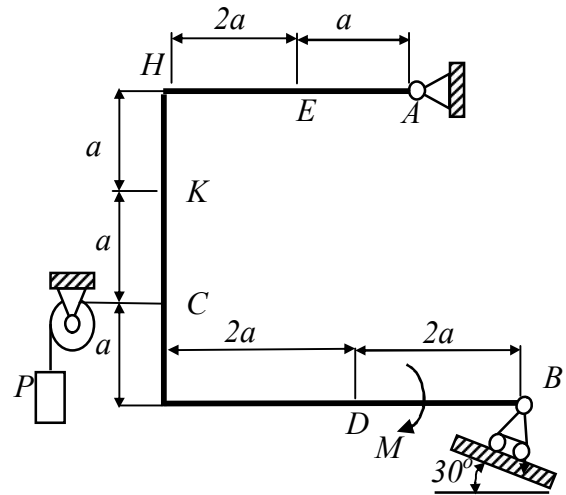


Схема 9

Рис. 1

Табл.1

№ строки	Номер схемы	Силы	\vec{F}_1		\vec{F}_2		\vec{F}_3		\vec{F}_4		
			Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град	
			$F_1=15кН$		$F_2=20кН$		$F_3=35кН$		$F_4=40кН$		
0	0	0	H	30	—	—	—	—	K	60	
1	1	1	—	—	D	15	E	60	—	—	
2	2	2	K	75	—	—	—	—	E	30	
3	3	3	—	—	K	60	H	30	—	—	
4	4	4	D	30	—	—	—	—	E	60	
5	5	5	—	—	H	30	—	—	D	75	
6	6	6	E	60	—	—	—	—	—	—	
7	7	7	—	—	D	60	—	—	H	15	
8	8	8	H	60	—	—	D	30	—	—	
9	9	9	—	—	E	75	K	30	—	—	
	б		в								

Задача 2.

Механизм состоит из ступенчатых колес 1-3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. 2, табл. 2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 – $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса 2 – $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса 3 – $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки A , B и C .

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $s_4(t)$ – закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2, $v_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т.д. (везде φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4 , s_5 и v_4 , v_5 – вниз.

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (v – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (v_5 – скорость груза 5 и т. д.).

Табл. 2

№ строки	Номер схемы	Номер условия	Дано	Найти	
				скорости	ускорения
0	0	0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	v_B, v_C	ε_2, a_A, a_5
1	1	1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_A, v_C	ε_3, a_B, a_4
2	2	2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	v_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	3	3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	4	4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	v_4, ω_2	ε_1, a_B, a_5
5	5	5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_C, a_4
6	6	6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_5
7	7	7	$v_4 = 3t^2 - 8$	v_4, ω_2	ε_3, a_B, a_5
8	8	8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	9	9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_A, a_4
	$\bar{6}$			$\bar{6}$	

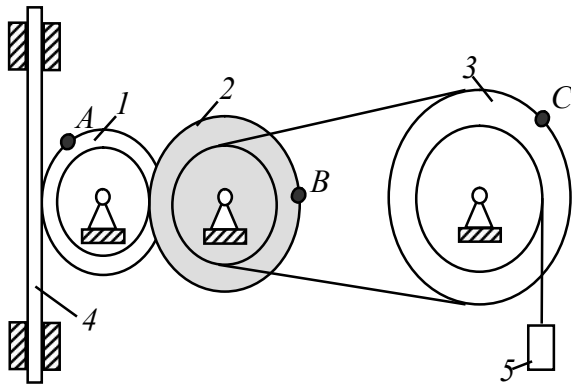


Схема 0

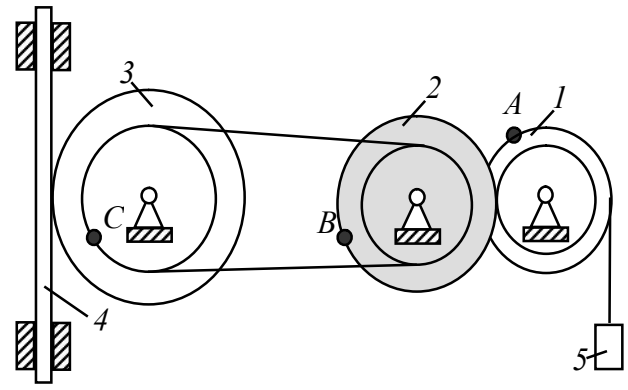


Схема 1

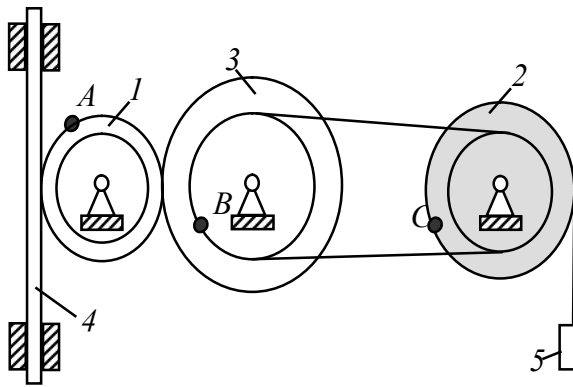


Схема 2

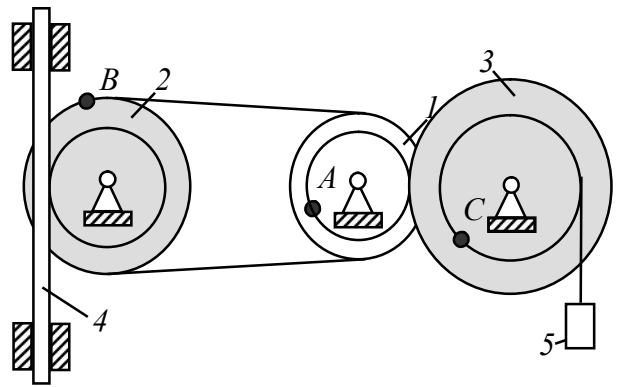


Схема 3

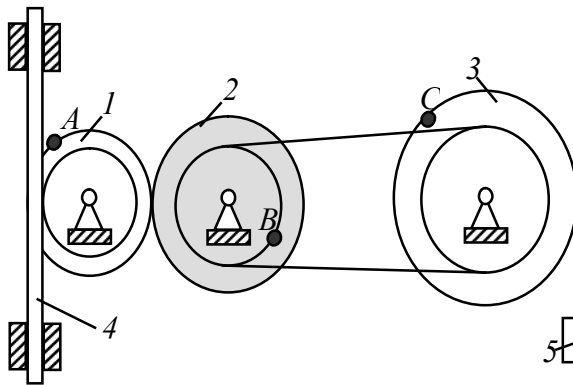


Схема 4

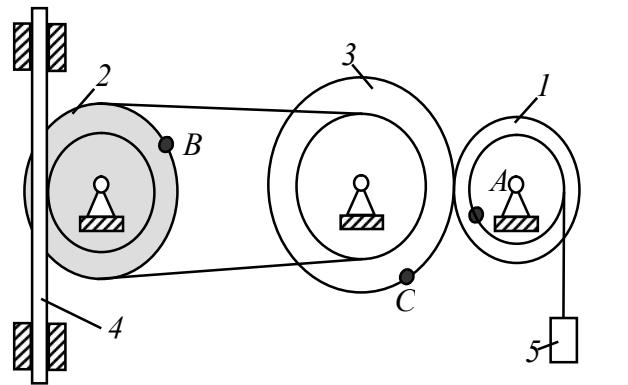


Схема 5

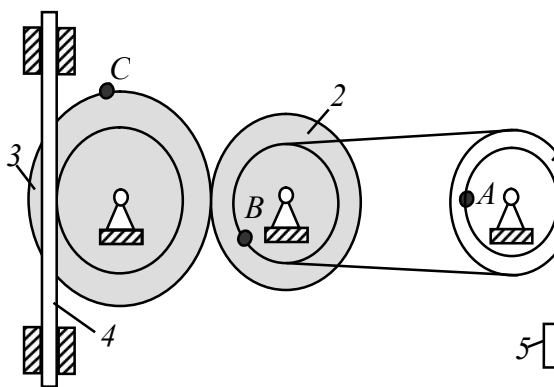


Схема 6

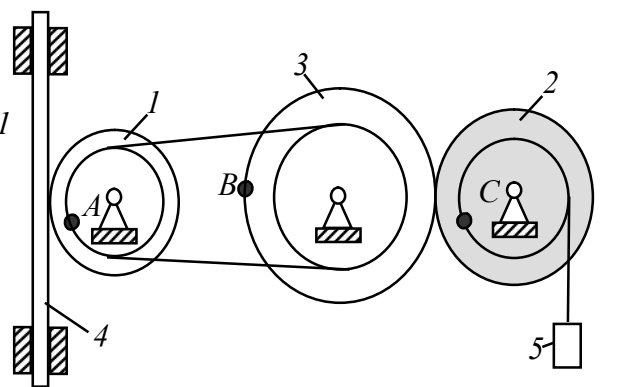


Схема 7

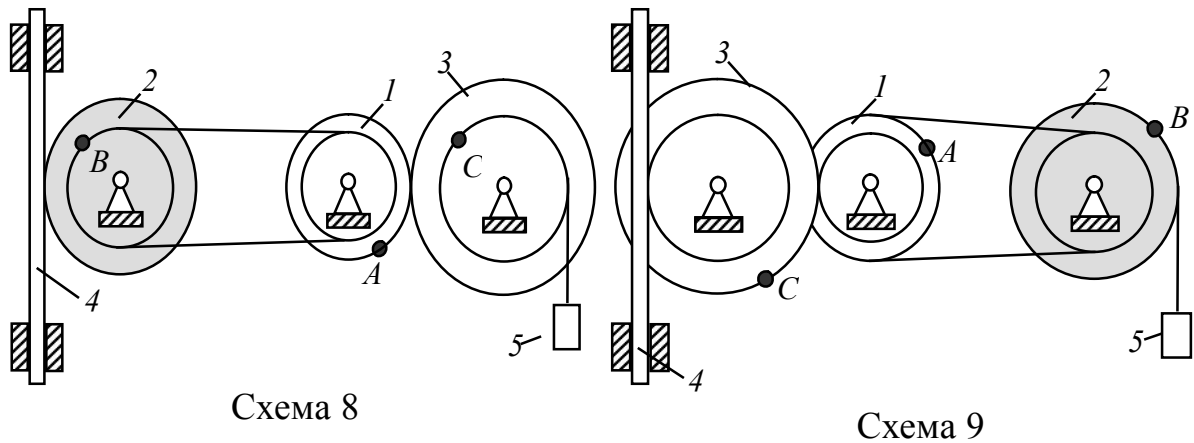


Рис. 2

Задача 3.

Груз D массой m , получив в точке A начальную скорость v_0 , движется в изогнутой трубе ABC , расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. 3, табл. 3).

На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила \bar{Q} (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды \bar{R} , зависящая от скорости \bar{v} груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

Табл. 3

№ строки	Номер схемы	$m, \text{ кг}$	$v_0, \text{ м/с}$	$Q, \text{ Н}$	$R, \text{ Н}$	$l, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$F_x, \text{ кН}$
0	0	2	20	6	$0,4v$	—	2,5	$2\sin(4t)$
1	1	2,4	12	6	$0,8v^2$	1,5	—	$6t$
2	2	4,5	18	9	$0,5v$	—	3	$3\sin(2t)$
3	3	6	14	22	$0,6v^2$	5	—	$-3\cos(2t)$
4	4	1,6	18	4	$0,4v$	—	2	$4\cos(4t)$
5	5	8	10	16	$0,5v^2$	4	—	$-6\sin(2t)$
6	6	1,8	24	5	$0,3v$	—	2	$9t^2$
7	7	4	12	12	$0,8v^2$	2,5	—	$-8\cos(4t)$
8	8	3	22	9	$0,5v$	—	3	$2\cos(2t)$
9	9	1,8	10	12	$0,2v^2$	4	—	$-6\sin(4t)$
	\bar{b}	\bar{b}						

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f=0,2$) и переменная сила \bar{F} , проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB=l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B , найти закон движения груза на участке BC , т. е. $x=f(t)$, где $x=BD$.

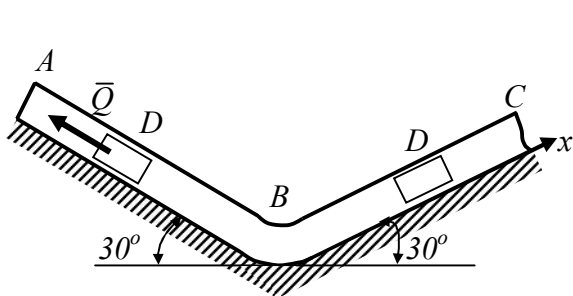


Схема 0

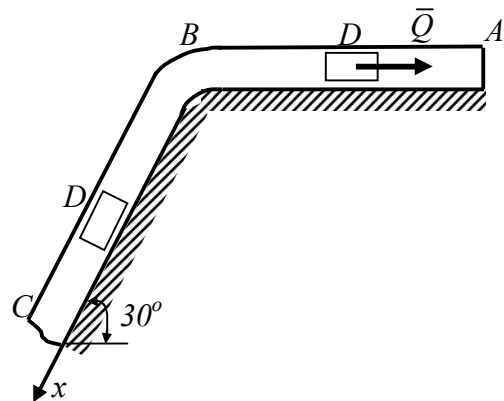


Схема 1

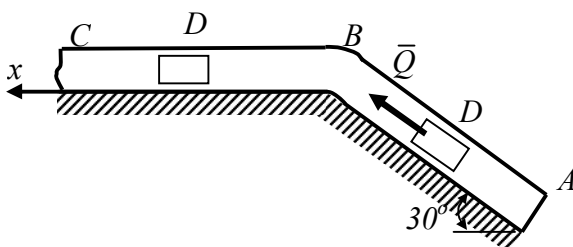


Схема 2

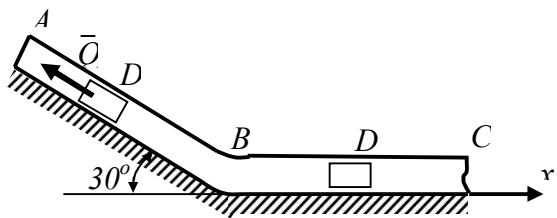


Схема 3

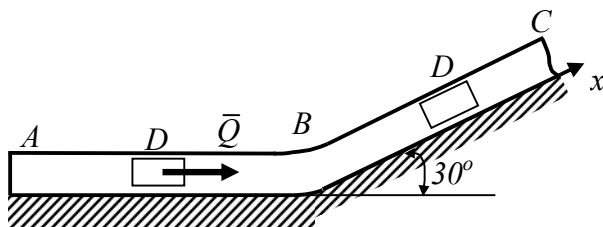


Схема 4

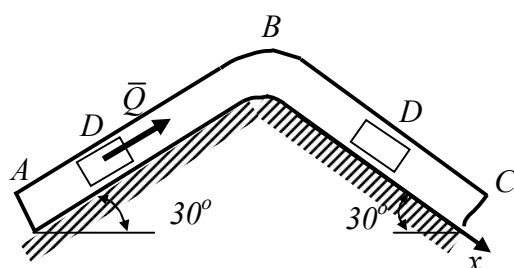


Схема 5

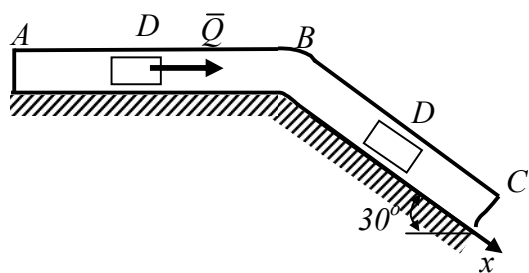


Схема 6

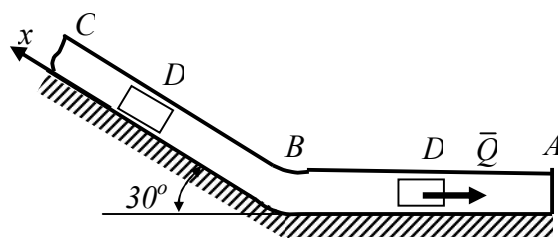


Схема 7

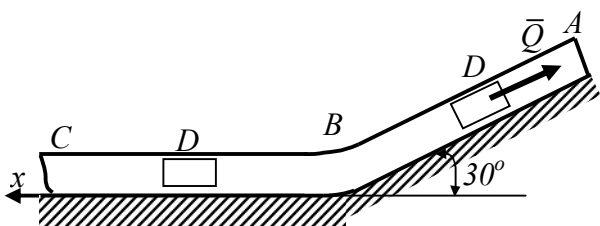


Схема 8

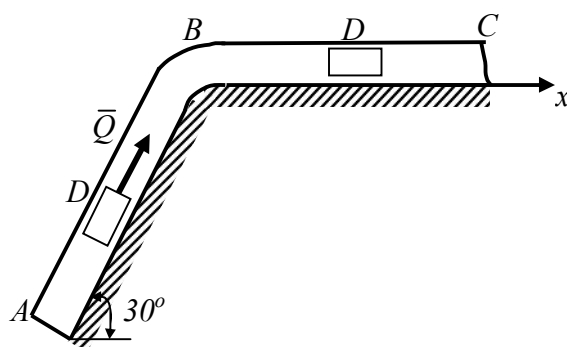


Схема 9

Рис. 3

Задача 4.

Задано сплошное сечение, которое состоит из двух участков: прямоугольного и профильного проката – швеллера или двутавра. Одна ось (X или Y) является общей центральной осью обоих участков (рис. 4)

Требуется:

1. Привести геометрические характеристики простых составляющих сечения относительно их собственных центральных осей.
2. Вычертить сечение в масштабе с указанием основных размеров в числах и обозначением центральных осей простых составляющих сечения, параллельных вспомогательным осям.
3. Определить координаты центра тяжести всего сечения и построить на чертеже центральные оси, параллельные вспомогательным осям.
4. Выполнить проверку правильности выполнения третьего пункта путём вычисления статических моментов всего сечения относительно общих центральных осей.

5. Определить значения главных центральных моментов инерции сечения.

6. Определить значения осевых моментов сопротивления (W_x , W_y).

Данные взять из табл. 4

Табл. 4

№ строки	Схема	Швеллер, №	Двутавр, №	Размеры прямоугольника, см	
				h	b
1	1	12	10	18	0,4
2	2	14	12	19	0,5
3	3	16	14	20	0,6
4	4	18	16	21	0,7
5	5	18 ^a	18	22	0,8
6	6	16 ^a	18 ^a	18	0,4
7	7	14 ^a	14	20	0,6
8	8	16	16	19	0,5
9	9	12	12	21	0,7
0	10	10	10	22	0,8
	e	e	e	δ	z

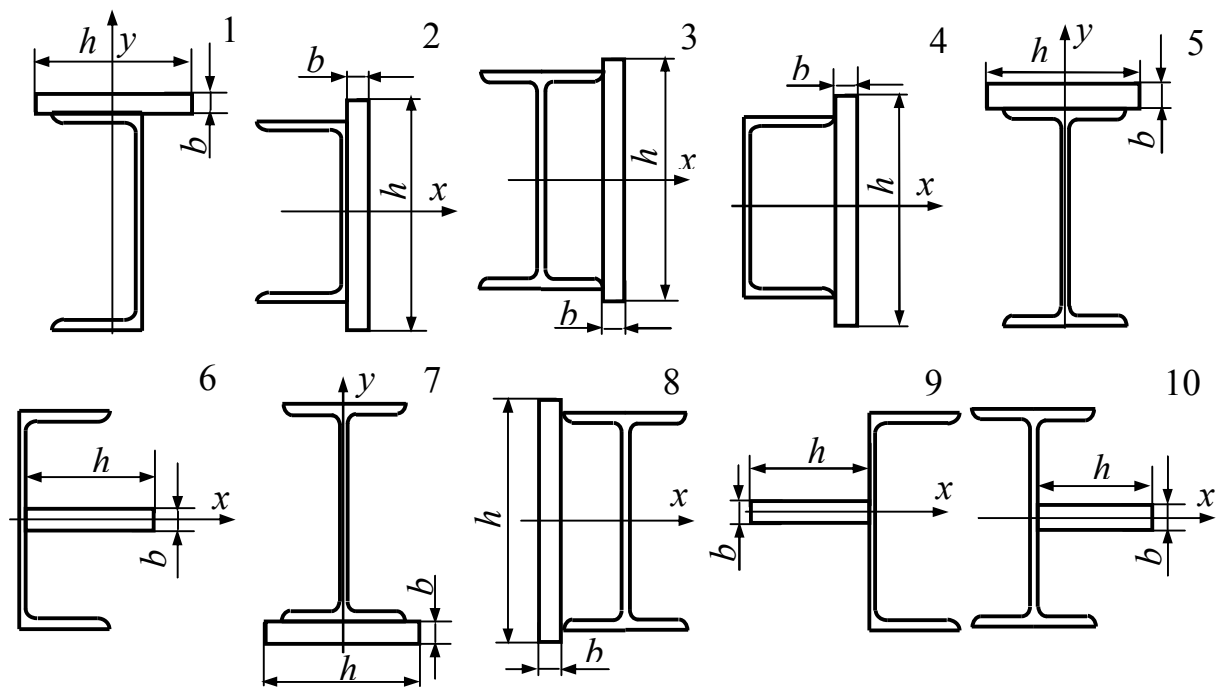


Рис. 4

Задача 5.

Абсолютно жёсткий брус AC опирается на шарнирно – неподвижную опору A и прикреплен к стальному стержню BC длиной L с помощью шарнира C (рис.5).

Требуется:

1. Определить реакции в опорах A и B .
2. Определить продольную силу N в стальном стержне и построить её эпюру.
3. Определить площадь поперечного сечения стержня.
4. Определить удлинение стержня BC и величину вертикального перемещения точки C .

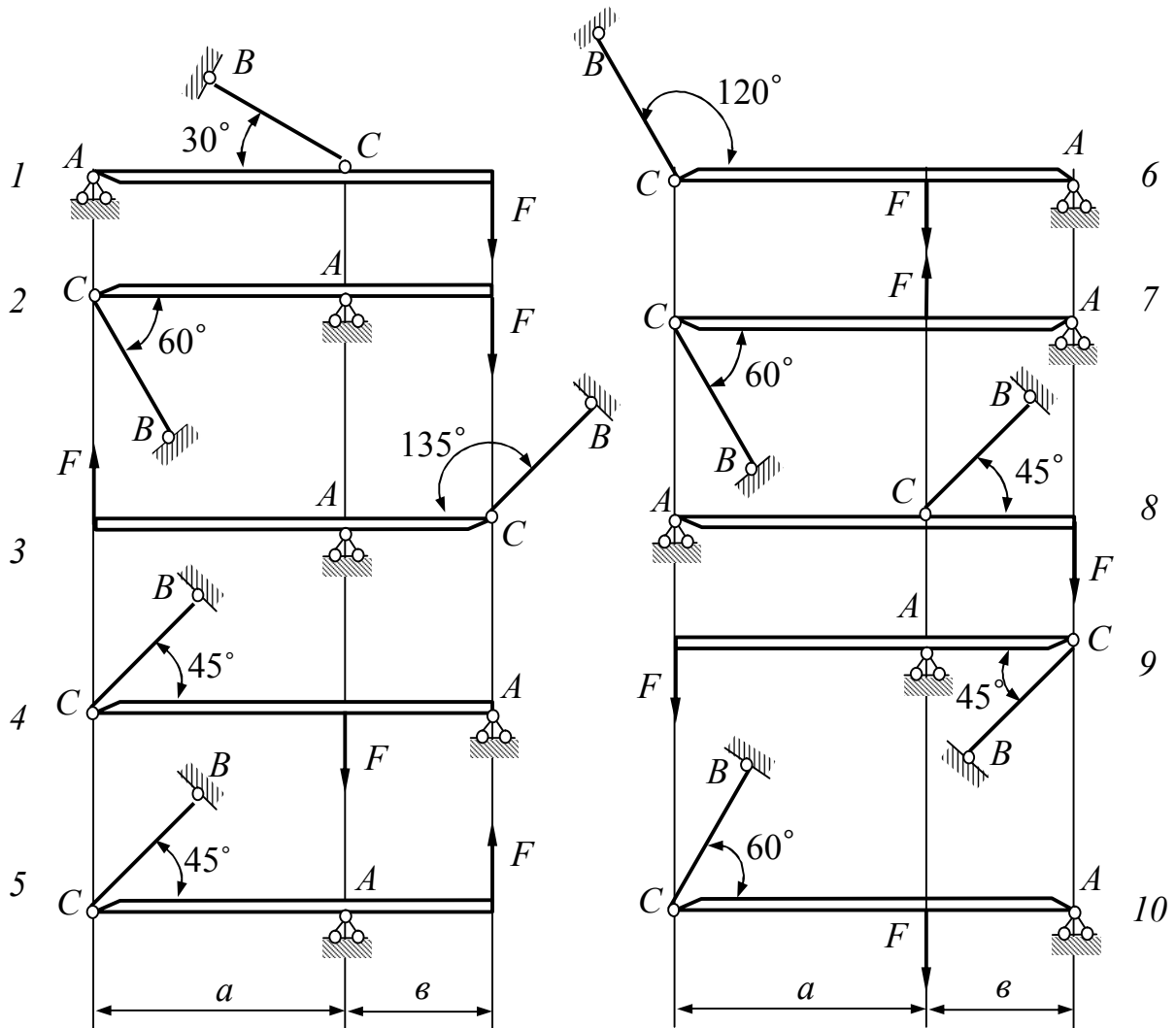


Рис. 5

Данные взять из табл. 5. Общие данные: предел текучести материала (Ст.3) - $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; коэффициент запаса прочности - $n_T = 1,5$; модуль упругости (модуль Юнга) - $E = 200 \text{ ГПа}$.

Табл. 5

№ строки	Схема	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$L, \text{ м}$	$F, \text{ кН}$
1	1	1,5	1,1	2,0	10
2	2	1,6	1,2	2,1	12
3	3	1,7	1,3	2,2	14
4	4	1,8	1,4	2,3	16
5	5	1,9	1,5	2,4	18
6	6	2,0	1,6	2,5	20
7	7	1,4	1,7	2,6	22
8	8	1,3	1,8	2,7	24
9	9	1,2	1,9	1,3	26
0	10	1,1	2,0	2,9	28
	e	a	b	L	F

Задача 6.

К стальному валу приложены три вращающих момента (рис.6).

Требуется:

1. Определить реактивный момент в заделке.
2. Построить эпюру крутящих моментов.
3. Определить диаметр вала (расчёты произвести из условия прочности и жёсткости).
4. Построить эпюру углов закручивания.

Данные взять из табл. 6. Общие данные: допускаемое касательное напряжение - $[\tau] = 50 \text{ МПа}$; допускаемый относительный угол закручивания - $[\varphi] = 0,5^\circ \text{ м}^{-1}$; модуль сдвига - $G = 80 \text{ ГПа}$.

Задача 7.

Даны две схемы стальных балок (рис.7)

Требуется:

Табл. 6

№ строки	Схема	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$M_1, кН·м$	$M_2, кН·м$	$M_3, кН·м$
1	1	1,5	1,1	0,5	5	2	4
2	2	1,6	1,2	0,6	6	3	5
3	3	1,7	1,3	0,7	7	4	13
4	4	1,8	1,4	0,8	8	5	12
5	5	1,9	1,5	0,9	9	6	11
6	6	2,0	1,6	1,0	7	10	10
7	7	1,4	1,7	1,1	11	8	9
8	8	1,3	1,8	1,2	12	9	8
9	9	1,2	1,9	1,3	13	10	7
0	10	1,1	2,0	1,4	14	11	6
	e	b	a	c	e	d	z

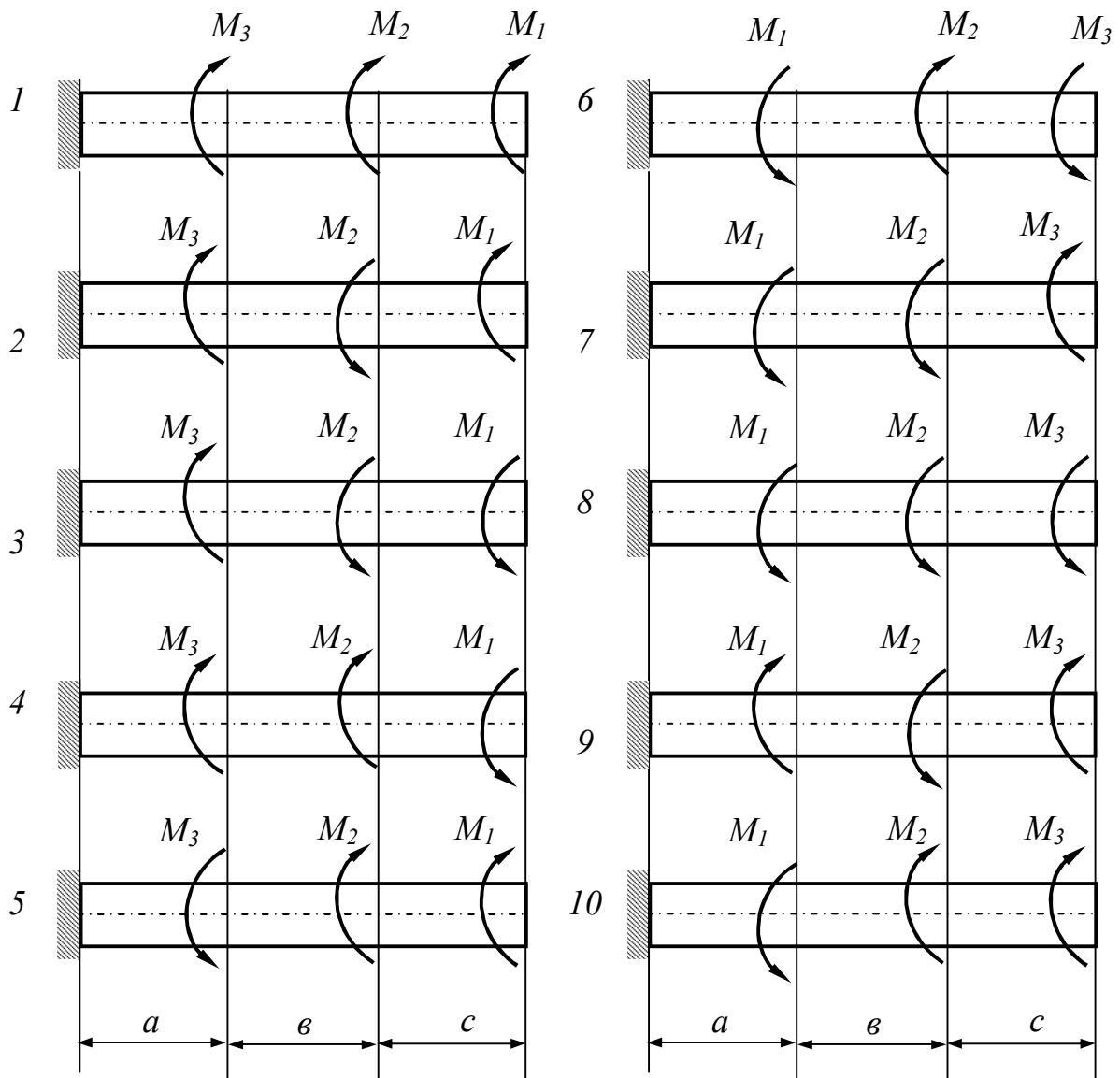


Рис. 6

Для схемы «а»:

1. Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .
2. Определить максимальное нормальное напряжение в балке сложного поперечного сечения, уже рассмотренного в задаче 4.
3. Определить фактический коэффициент запаса прочности.

Для схемы «б»:

1. Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .
2. Подобрать сечения следующей формы: прямоугольное ($h/b = k$); круглое; кольцевое ($\alpha = d/D$); состоящее из двух швеллеров; двутавровое.
3. Оценить эффективность формы сечения.

Данные взять из табл. 7. Общие данные: предел текучести материала - $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; коэффициент запаса прочности - $n_T = 1,5$; модуль упругости (модуль Юнга) - $E = 200 \text{ ГПа}$.

Задача 8.

Вал трансмиссии (рис.8) делает n оборотов в минуту и передаёт мощность $N \text{ кВт}$.

Требуется:

1. Определить моменты, приложенные к шкивам 1 и 2, по заданным величинам N и n .
2. Построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$.
3. Определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы 1 и 2, по найденным моментам и заданным диаметрам D_1 и D_2 .
4. Определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес вала и шкивов не учитывать).
5. Построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил ($M_{гор}$) и от вертикальных сил ($M_{верт}$).
6. Построить эпюру суммарного изгибающего момента.

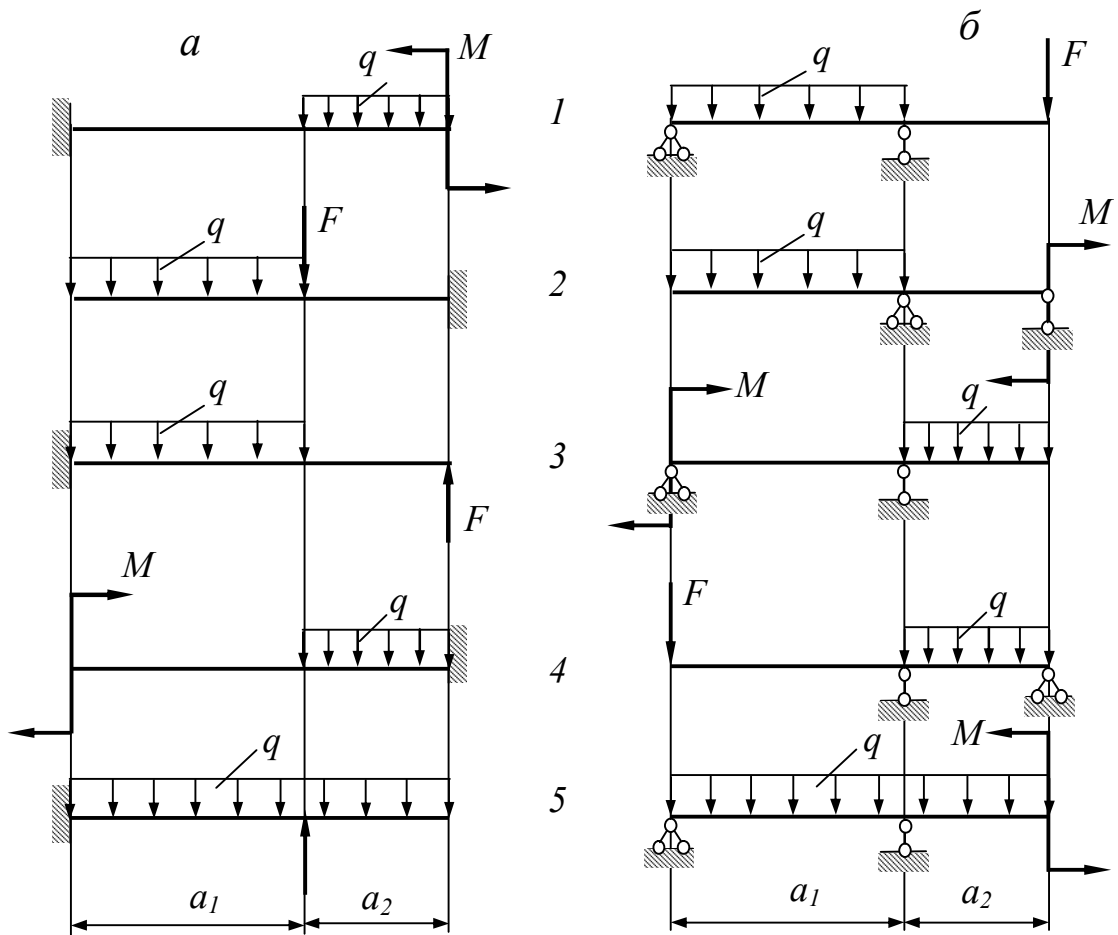


Рис. 7

Табл. 7

№ строки	Схема	$a_1, м$	$a_2, м$	$q, кН/м$	$F, кН$	$M, кН·м$	k	α
1	1	1,0	2,0	10	25	10	1.5	0,7
2	2	1,2	1,8	12	24	15	2.0	0,8
3	3	1,4	1,6	14	22	20	2.5	0,9
4	4	1,6	1,4	16	20	25	3.0	0,8
5	5	1,2	1,8	18	18	30	2.5	0,7
6	1	2,0	1,0	20	16	35	2.0	0,8
7	2	1,8	1,2	22	15	30	1.5	0,7
8	3	1,6	1,4	24	14	25	2.0	0,9
9	4	1,4	1,6	26	12	20	2.5	0,8
0	5	1,2	1,8	28	10	15	3.0	0,9
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>e</i>	<i>б</i>

7. Найти опасное сечение и определить величину максимального расчётного момента по третьей теории прочности.

8. Подобрать диаметр вала d при $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$.

Данные взять из табл. 8.

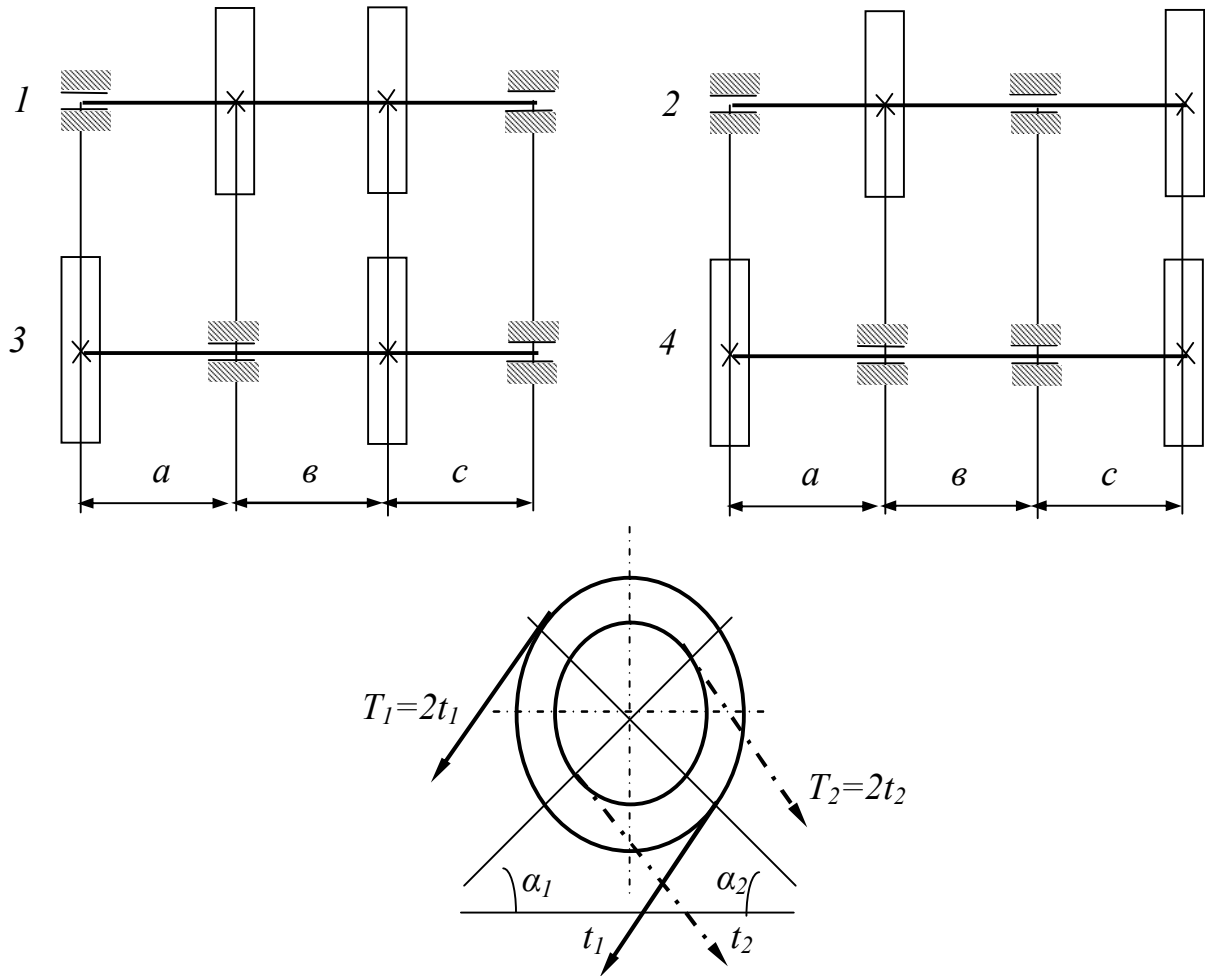


Рис. 8

Табл. 8

№ строки	Схема	N , кВт	n , об/мин	a , м	b , м	c , м	D_1 , м	D_2 , м	α_1 , град	α_2 , град
1	1	10	100	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	10	10
2	2	20	200	1,2	1,2	1,3	1,2	1,0	20	30
3	3	30	300	1,3	1,1	1,3	1,3	1,2	30	45
4	4	40	400	1,1	1,4	1,2	1,4	1,0	40	45
5	1	50	500	1,2	1,5	1,3	1,2	1,5	50	60
6	2	60	600	1,6	1,0	1,4	1,6	1,4	60	30
7	3	70	700	1,7	1,2	1,5	1,7	1,4	90	70
8	4	80	800	1,3	1,8	1,5	1,1	1,8	90	45
9	1	90	900	1,5	1,6	1,9	1,9	1,7	70	45
0	2	100	1000	2,0	1,8	2,0	2,0	1,6	100	45
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>

Задача 9.

Стальной стержень длиной l сжимается силой F (рис.9).

Требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения стержня при допуске напряжении на центральное сжатие $[\sigma]=160 \text{ МПа}$, пользуясь методом последовательных приближений.
2. Найти величину критической силы, если предельная гибкость составляет $\lambda_{пред} = 100$.
3. Найти коэффициент запаса устойчивости.

Данные взять из табл. 9.

Табл. 9

№ строки	Схема	Форма сечения	$F, \text{кН}$	$l, \text{м}$
1	1	1	100	2,1
2	2	2	200	2,2
3	3	3	300	2,3
4	4	4	400	2,4
5	1	5	500	2,5
6	2	6	600	2,6
7	3	7	700	2,7
8	4	8	800	2,8
9	1	9	900	2,9
0	2	10	1000	3,0
	e	a	b	v

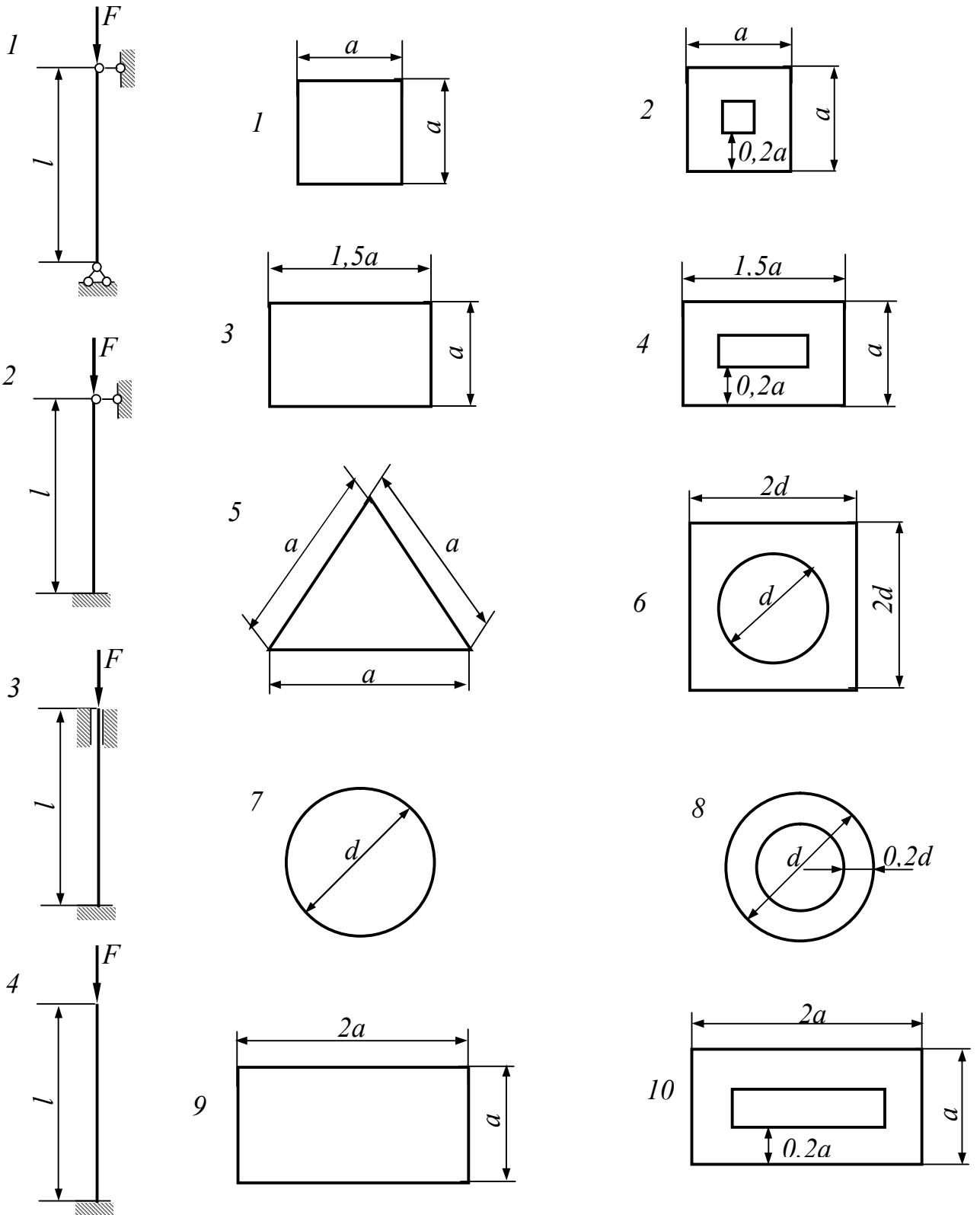


Рис. 9

Примеры решения задач контрольной работы

Задача 1 (рис.10)

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 1).

Исходные данные.

Жесткая пластина $ABCD$ (рис. 10) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

$$F = 25 \text{ кН}, \alpha = 60^\circ, P = 18 \text{ кН}, \gamma = 75^\circ, M = 50 \text{ кНм}, \beta = 30^\circ, a = 0,5 \text{ м}.$$

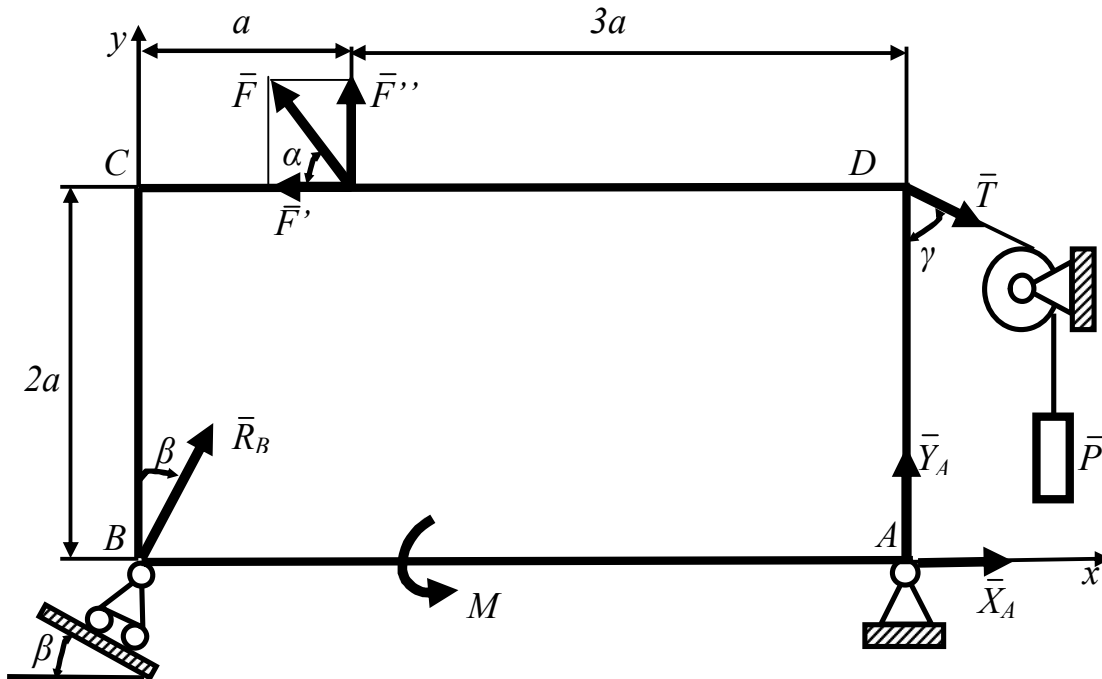


Рис. 10

Решение.

Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси x и y и изобразим действующие на пластину силы: силу \bar{F} , пару сил с моментом M , натяжение троса \bar{T} (по модулю $T = F$) и реакции связей \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{R}_B (ре-

акцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы \bar{F} относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу \bar{F} на составляющие \bar{F}' , \bar{F}'' ($F' = F \cos \alpha$, $F'' = F \sin \alpha$) и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0;$$

$$\sum m(\bar{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot 3a - T \sin \gamma \cdot 2a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции $X_A = -8,5 \text{ кН}$; $Y_A = -23,3 \text{ кН}$; $R_B = 7,3 \text{ кН}$. Знаки указывают, что силы \bar{X}_A и \bar{Y}_A направлены противоположно показанным на рис. 10.

Задача 2 (рис.11)

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 2).

Исходные данные.

Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3 , скрепленное с валом радиуса r_3 , находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. 11). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

$R_2 = 6 \text{ см}$, $r_2 = 4 \text{ см}$, $R_3 = 8 \text{ см}$, $r_3 = 3 \text{ см}$, $s_1 = 3t^3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), A – точка обода колеса 3, $t_1 = 3 \text{ с}$. Определить: ω_3 , v_4 , ε_3 , a_A в момент времени $t = t_1$.

Решение.

Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через v_i а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через u_i .

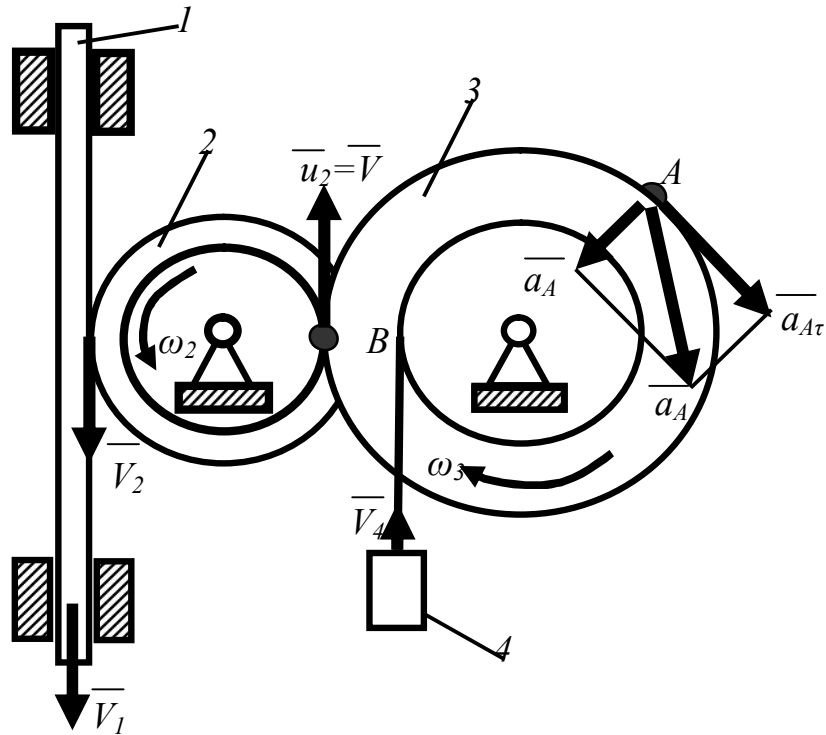


Рис. 11

I. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t . Зная закон движения рейки 1 , находим ее скорость:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \quad (2.1)$$

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $v_2 = v_1$ или $\omega_2 R_2 = v_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = v_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \quad (2.2)$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим $\omega_3 = 6,75 \text{ с}^{-1}$.

II. Определяем v_4 . Так как $v_4 = v_B = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 3$ с $v_4 = 20,25 \text{ см/с}$.

III. Определяем ε_3 . Учитывая второе из равенств (2.2), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1,5t$. Тогда при $t_1=3$ с $\varepsilon_3=4,5$ с⁻².

IV. Определяем a_A . Для точки A $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$, где численно $a_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени $t_1=3$ с имеем

$$a_{A\tau} = 36 \text{ см/с}^2, \quad a_{An} = 364,5 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366,3 \text{ см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. 11.

Задача 3 (рис.12)

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 3).

Исходные данные.

На вертикальном участке AB трубы (рис. 12) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления \bar{R} ; движение от точки A , где $v_0 = 0$, до точки B длится t_1 с. На наклонном участке BC на груз действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен f) и переменная сила $F=F(t)$, заданная в ньютонах. $m=8$ кг, $R = \mu v^2$, где $\mu=0,2$ кг/м, $v_0=0$, $t_1=2$ с, $f=0,2$, $F_x=16 \sin(4t)$, $\alpha=30^\circ$.

Решение.

I. Рассмотрим движение груза на участке AB , считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$ и \bar{R} . Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{kz} \quad \text{или} \quad m \frac{dv}{dt} = P_z + R_z. \quad (3.1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$ подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $v_z = v$, получим

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v^2 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - v^2 \right). \quad (3.2)$$

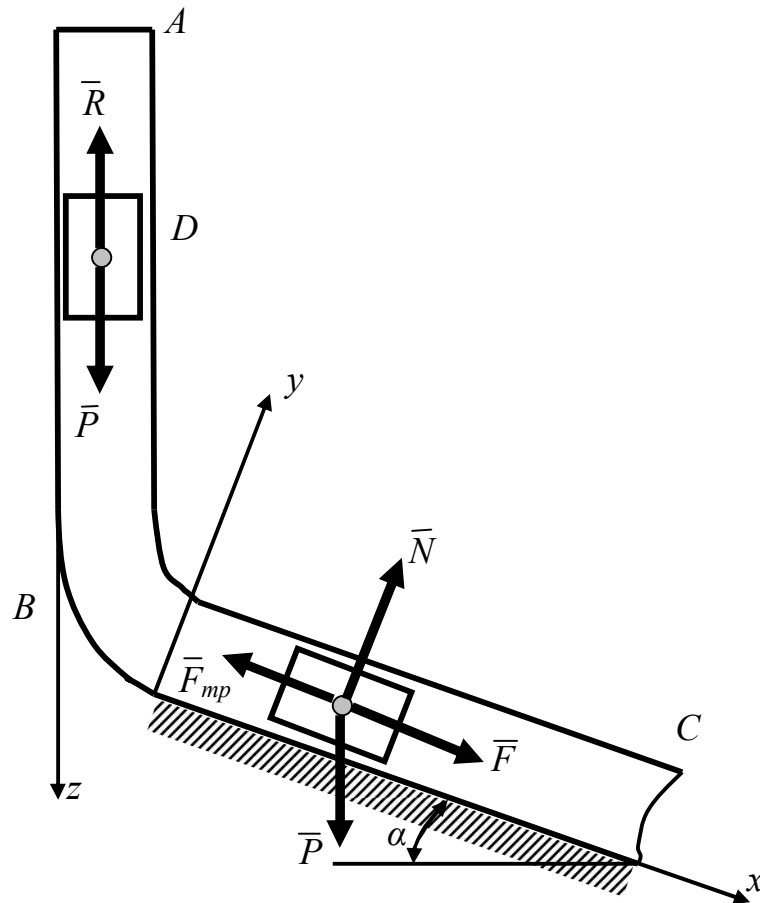


Рис. 12

Введем для сокращения записей обозначение

$$n^2 = \frac{mg}{\mu} = 400 \quad (n=20 \text{ м/с}), \quad (3.3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Тогда, разделяя в уравнении (3.2) переменные и взяв затем от обеих частей равенства интегралы, получим

$$\frac{dv}{n^2 - v^2} = \frac{\mu}{m} dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{2n} \ln \frac{n+v}{n-v} = \frac{\mu}{m} t + C_1. \quad (3.4)$$

По начальным условиям при $t=0$ $v = v_0 = 0$, что дает $C_1 = (1/2n) \ln 1 = 0$.
Введя еще одно обозначение

$$k = n \frac{\mu}{m} = 0,5c^{-1}, \quad (3.5)$$

получим из (3.2)

$$\ln \frac{n+v}{n-v} = 2kt \quad \text{и} \quad \frac{n+v}{n-v} = e^{2kt}.$$

Отсюда находим, что

$$v = n \frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}. \quad (3.6)$$

Полагая здесь $t=t_1=2$ с и заменяя n и k их значениями (3.3) и (3.5), определим скорость v_B груза в точке B (число $e=2,7$):

$$v_B = 20 \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = 15,2 \text{ м/с}. \quad (3.7)$$

II. Рассмотрим движение груза на участке BC ; найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$, \bar{N} , $\bar{F}_{\text{тр}}$ и \bar{F} . Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx :

$$m \frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{\text{мп}x} + F_x \quad \text{или} \quad (3.8)$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + F_x,$$

где $F_{\text{мп}} = fN$. Для определения N составим уравнение в проекции на ось By . Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg \cos \alpha$, откуда $N = mg \cos \alpha$. Следовательно, $F_{\text{мп}} = fmg \cos \alpha$; кроме того, $F_x = 16 \sin(4t)$ и уравнение (3.8) примет вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(4t). \quad (3.9)$$

Разделив обе части равенства на m , вычислим $g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2$; $16/m = 2$ и подставим эти значения в (3.9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 3,2 + 2 \sin(4t). \quad (3.10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$v_x = 3,2t - \frac{1}{2} \cos(4t) + C_2. \quad (3.11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B , считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (3.7). Подставляя эти величины в (3.11), получим

$$C_2 = v_B + 0,5 \cos 0 = 15,2 + 0,5 = 15,7.$$

При найденном значении C_2 уравнение (3.11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 0,5 \cos(4t) + 15,7. \quad (3.12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 1,6t^2 + 15,7t - 0,13 \sin(4t) + C_3. \quad (3.13)$$

Так как при $t=0$ $x=0$, то $C_3=0$ и окончательно искомым закон движения груза будет

$$x = 1,6t^2 + 15,7t - 0,13 \sin(4t), \quad (3.14)$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Задача 4 (рис.13)

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 4).

Исходные данные.

Сложное сечение состоит из двух составляющих: 1 – швеллер № 20, 2 – прямоугольник с размерами $h_2 = 1$ см, $b_2 = 12$ см. Ось Y проходит через центр тяжести обоих составляющих (рис. 13,а).

Решение.

I. Геометрические характеристики швеллера относительно его собственных центральных осей (рис. 13,б) согласно ГОСТ 8240-72 следующие:

- площадь $A_I = 23,4 \text{ см}^2$,
- высота сечения $h_I = 20 \text{ см}$,
- моменты инерции $I_{X_1} = 1520 \text{ см}^4$, $I_{Y_1} = 113 \text{ см}^4$,
- абсцисса центра тяжести швеллера $x_0 = 2.07 \text{ см}$

(ГОСТ прокатных профилей есть в приложениях /7/, приложение 1, 2, с. 206-209).

Здесь и далее индекс в нижнем правом углу означает номер простой составляющей сечения. Например, швеллер согласно принятой в задаче нумерации имеет номер 1.

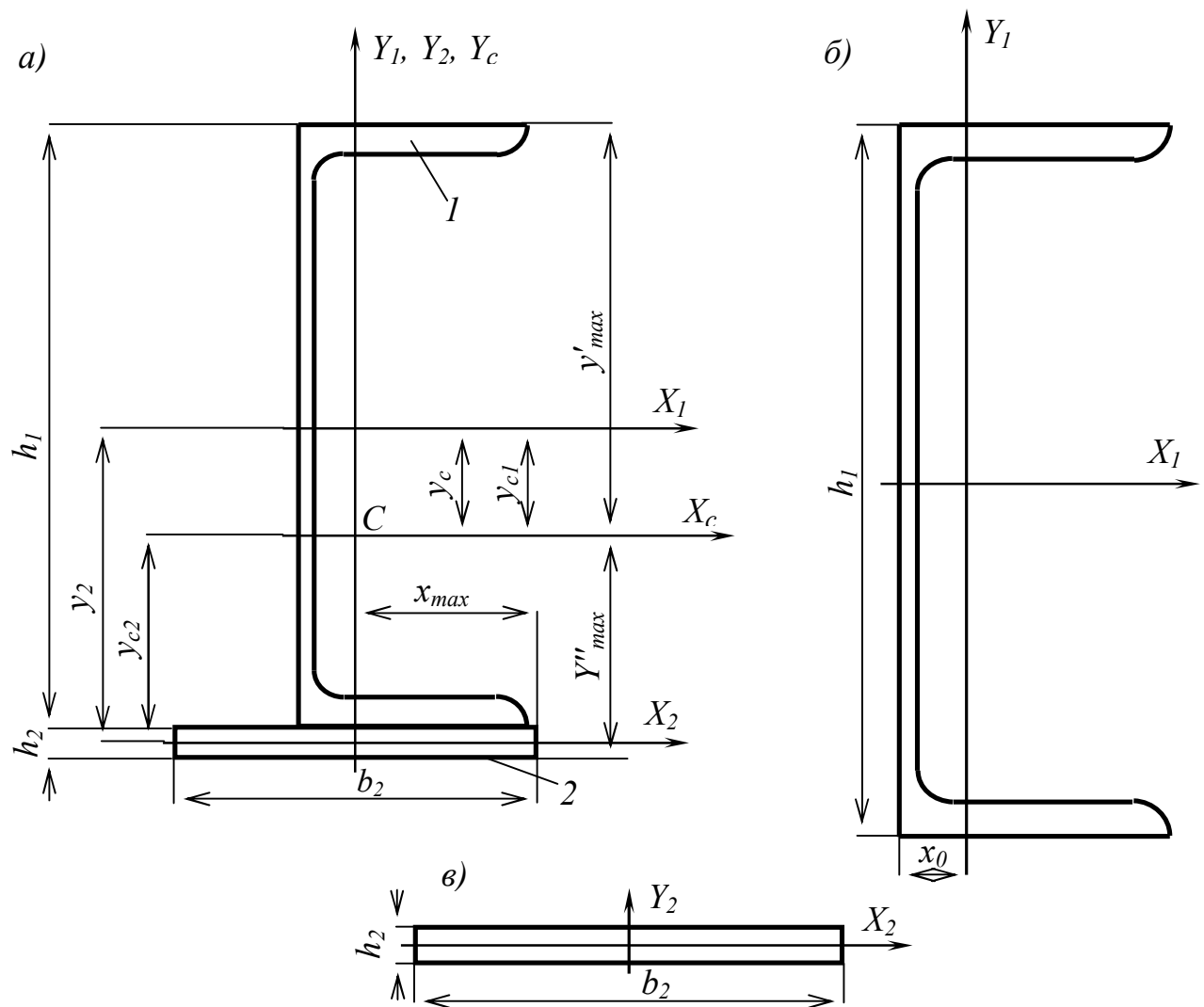


Рис. 13

Геометрические характеристики прямоугольника относительно его собственных центральных осей (рис. 13,в) следующие:

- площадь $A_2 = h_2 \cdot b_2 = 1 \cdot 12 = 12 \text{ см}^2$,
- моменты инерции относительно собственных центральных осей $I_{X_2} = b_2 h_2^3 / 12 = 12 \cdot 1^3 / 12 = 1 \text{ см}^4$, $I_{Y_2} = h_2 b_2^3 / 12 = 1 \cdot 12^3 / 12 = 144 \text{ см}^4$.

II. Построение сечения в масштабе (см. рис. 13,а).

III. Определение координаты центра тяжести сечения.

- *Строим вспомогательную систему координат.* В качестве вспомогательной системы координат выбираем центральные оси швеллера X_1 и Y_1 .

- *Определяем координаты центра тяжести сечения относительно вспомогательной системы координат.* Для рассматриваемого сечения необходимо вычислить только одну координату y_c , так как другая координата x_c известна. Поскольку центр тяжести всего сечения должен лежать на прямой, соединяющей центры тяжести простых составляющих (это правило действительно для сечений, состоящих их двух частей), то в нашем случае центр тяжести лежит на оси Y_1 (см. рис. 13,а), а значит координата

$$x_c = 0.$$

Координата центра тяжести (к. ц. т.) сечения y_c определяется по формуле:

$$y_c = S_X / A,$$

где A – площадь всего сечения; S_X - статический момент всего сечения относительно оси X . Для рассматриваемого примера статический момент сечения следует обозначить, как S_{X_1} , так как y_c определяется относительно оси X_1 .

Рассматриваемое сечение сложное. Для определения статического момента сложного сечения существует формула

$$S_X = \sum_{i=1}^n {}^i S_X = \sum_{i=1}^n y_i A_i,$$

где n – число простых составляющих сложного сечения; ${}^i S_X$ – статический момент i – ой составляющей сложного сечения; y_i , A_i – координата центра тяжести и площадь i – ой составляющей сложного сечения. Применительно к нашей задаче формула примет следующий вид:

$$S_{X_1} = {}^1 S_{X_1} + {}^2 S_{X_1} = y_1 A_1 + y_2 A_2.$$

Так как координата y в прямоугольной системе координат представляет собой кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от центра тяжести соответствующей фигуры до оси X , то: $y_1 = 0$,

$$y_2 = -\left(\frac{h_2}{2} + \frac{h_1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{20}{2}\right) = -10,5 \text{ см}; \quad A_1 \text{ и } A_2 \text{ определены в пункте I.}$$

Подставим в формулу полученные значения:

$$S_{X_1} = 0 \cdot 23,4 + (-10,5 \cdot 12) = -126 \text{ см}^3.$$

Площадь сложного сечения $A = \sum_{i=1}^n A_i$. Тогда для рассматриваемого случая:

$$A = A_1 + A_2 = 23,4 + 12 = 35,4 \text{ см}^2.$$

Следовательно,
$$y_c = \frac{S_{X_1}}{A} = \frac{-126}{35,4} = -3,56 \text{ см}.$$

Для случая, когда неизвестной является координата x_c , задача решается аналогично с учётом соответствующих изменений.

- Показываем на чертеже центральные оси всего сечения X_c и Y_c .

Причём эти оси строим параллельно вспомогательным осям, как показано на рис. 13,а.

IV. Проводим проверку правильности определения центра тяжести сечения.

В основе проверки лежит положение о том, что статические моменты сечения относительно центральных осей равны нулю. Значит, в нашем случае следует вычислить статические моменты сечения относительно полученных центральных осей X_c и Y_c , при этом координаты ц. т. простых составляющих относительно этих осей:

$$x_{c1} = x_1 - x_c = 0 - 0 = 0 \text{ см}, \quad x_{c2} = x_2 - x_c = 0 - 0 = 0 \text{ см};$$

$$y_{c1} = y_1 - y_c = 0 - (-3,56) = 3,56 \text{ см}, \quad y_{c2} = y_2 - y_c = -10,5 - (-3,56) = -6,94 \text{ см}.$$

Статические моменты сечения относительно осей X_c и Y_c :

$$S_{X_c} = {}^1S_{X_c} + {}^2S_{X_c} = y_{c1}A_1 + y_{c2}A_2 = 3,56 \cdot 23,4 + (-6,94) \cdot 12 = 83,30 - 83,28 = 0,02 \approx 0,$$

$$S_{Y_c} = 0.$$

Иными словами, координаты ц. т. всего сечения вычислены правильно.

V. Определяем главные центральные моменты инерции сечения.

- *Вычисляем центробежный момент инерции всего сечения.*

Ось Y_c - центральная ось всего сечения и Y_1, Y_2 - центральные оси простых составляющих – совпадают. Оси X_1 и Y_1 - главные оси швеллера (так как ось X_1 - ось симметрии швеллера), значит центробежный момент инерции швеллера относительно их $I_{X_1Y_1} = 0$. Оси X_2 и Y_2 - главные оси прямоугольника (так как оси X_2 и Y_2 - оси симметрии прямоугольника), значит $I_{X_2Y_2} = 0$. В этом случае центробежный момент инерции всего сечения в соответствии формулой изменения центробежных моментов инерции при параллельном переносе осей (см. теорию):

$$I_{X_cY_c} = {}^1I_{X_cY_c} + {}^2I_{X_cY_c} = (I_{X_1Y_1} + x_{c1}y_{c1}A_1) + (I_{X_2Y_2} + x_{c2}y_{c2}A_2) = (0 + 0) + (0 + 0) = 0$$

- *Находим главные оси всего сечения.*

Так как центробежный момент инерции сечения относительно главных осей равен нулю, то в нашем случае оси X_c и Y_c - главные оси инерции всего сечения.

- *Вычисляем главные центральные моменты инерции всего сечения.*

Поскольку главными центральными моментами инерции являются моменты инерции относительно главных центральных осей, то вычисления моментов инерции будем производить относительно осей X_c и Y_c .

Воспользовавшись формулой определения осевых моментов инерции сложного сечения и формулой перехода между параллельными осями для осевых моментов инерции (см. теорию), получим

$$I_{X_c} = {}^1I_{X_c} + {}^2I_{X_c} = (I_{X_1} + y_{c1}^2 A_1) + (I_{X_2} + y_{c2}^2 A_2) = (1520 + 3,56^2 \cdot 23,4) + \\ + (1 + (-6,94)^2 \cdot 12) = 2395,52 \text{ см}^4, \\ I_{Y_c} = {}^1I_{Y_c} + {}^2I_{Y_c} = (I_{Y_1} + x_{c1}^2 A_1) + (I_{Y_2} + x_{c2}^2 A_2) = (113 + 0^2 \cdot 23,4) + \\ + (144 + 0^2 \cdot 12) = 257 \text{ см}^4.$$

VI. Определяем значения осевых моментов сопротивления.

Осевые моменты сопротивления в нашем случае вычисляются по формулам

$$W_{X_c} = I_{X_c} / y_{max}; \quad W_{Y_c} = I_{Y_c} / x_{max},$$

где y_{max} и x_{max} - расстояния от соответствующих осей до наиболее удалённых точек сечения (см. рис. 13,а).

Здесь

$$y'_{max} = \frac{h_1}{2} + y_c = 10 + 3,56 = 13,56 \text{ см}; \quad y''_{max} = \frac{h_1}{2} - y_c + h_2 = 10 - 3,56 + 1 = 7,44 \text{ см};$$

$$x_{max} = \frac{b_2}{2} = 6 \text{ см}.$$

Тогда

$$W'_{X_c} = 2395,52 / 13,56 = 176,66 \text{ см}^3; \quad W''_{X_c} = 2395,52 / 7,44 = 321,98 \text{ см}^3;$$

$$W_{Y_c} = 257 / 6 = 42,83 \text{ см}^3.$$

Задача 5 (рис.14)

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 5).

Исходные данные.

Предел текучести материала стержня (Ст. 3) - $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, коэффициент запаса прочности - $n_T = 1,5$, модуль Юнга - $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $L = 2 \text{ м}$, $F = 20 \text{ кН}$.

Решение.

I. Определяем реакции в опорах **D** и **B**.

Рассматриваемая система является статически определимой, поскольку число связей, накладываемых на систему, соответствует числу уравнений равновесия статики в плоскости. Последних всегда три. В нашем случае в опоре **B** возникает только одна реакция в направлении продольной оси стержня **BC**, реакция R_B , в опоре **D** – две: R_D и H_D , так как она является шарнирно неподвижной опорой (см. рис. 14,а).

Составляем уравнения равновесия статики. Желательно каждое уравнение представить так, чтобы оно содержало только одну неизвестную.

$$\sum M_D = 0; F \cdot (a + b) - R_B \cdot a \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F \cdot (a + b)}{a \cdot \sin 60^\circ} = \frac{20 \cdot (1 + 2)}{1 \cdot 0,866} = 69,3 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0; R_B \cdot \sin \alpha - R_D - F = 0 \Rightarrow R_D = R_B \cdot \sin 60^\circ - F = 69,3 \cdot 0,866 - 20 = 40 \text{ кН}.$$

$$\sum X = 0; R_B \cdot \cos \alpha - H_D = 0 \Rightarrow H_D = R_B \cdot \cos \alpha = 69,3 \cdot 0,5 = 34,65 \text{ кН}.$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum M_C = F \cdot b - R_D \cdot a = 0, \quad 20 \cdot 2 - 40 \cdot 1 = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Проверка обязательна. Полученное тождество свидетельствует о правильности результатов.

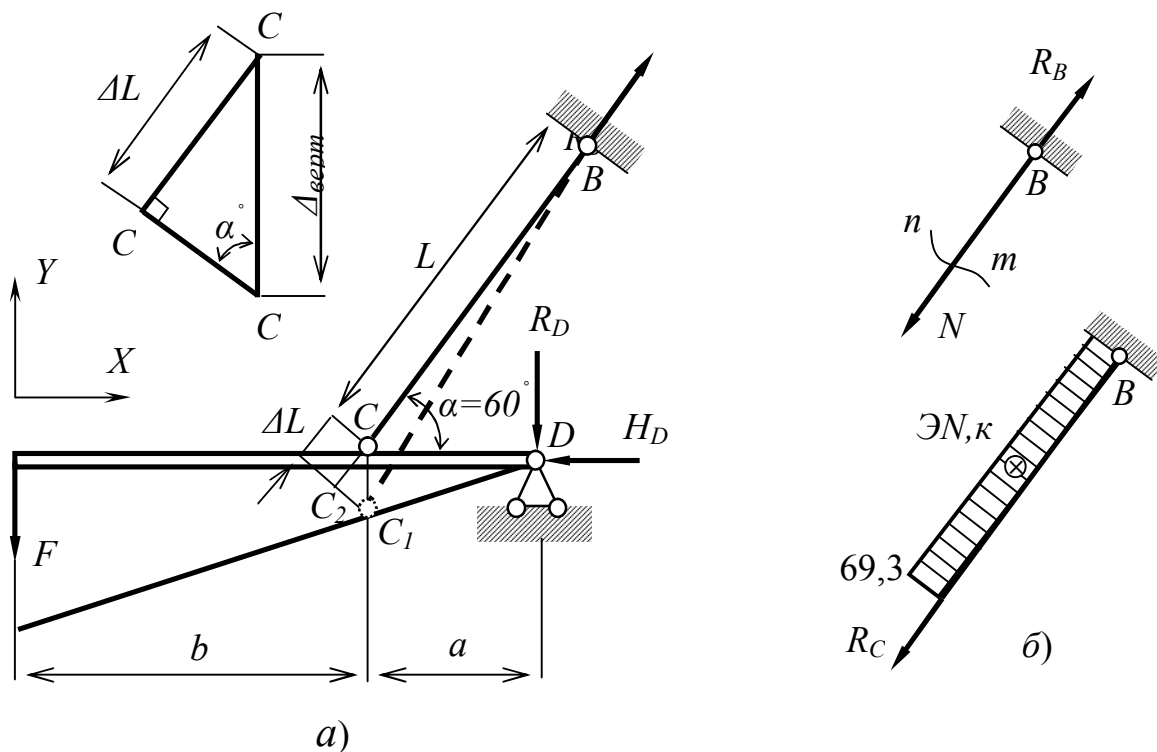


Рис.14

II. Определяем продольную силу N в стальном стержне и строим её эпюру.

- Пользуясь методом сечения, определяем значение нормальной силы N в сечении $m - n$ стержня BC (см. рис. 14,б): $N = R_B = 69,3 \text{ кН}$.
- Строим эпюру продольной силы. Поскольку при изменении значения координаты сечения $m - n$ в пределах длины стержня продольная сила остаётся постоянной, эпюра продольной силы представляет собой прямую параллельную оси абсцисс (см. рис. 14,б).

III. Определяем площадь поперечного сечения стержня BC .

Условие прочности при растяжении для пластичных материалов

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \text{ где } \sigma_{\max} = N_{\max} / A$$

σ_{\max} - наибольшее по абсолютной величине расчётное растягивающее напряжение, возникающее в сечении с продольной силой N_{\max} и с площадью поперечного сечения A .

Допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$.

Из условия прочности решаем проектировочную задачу, математическая формулировка которой:

$$A \geq N_{\max} / [\sigma].$$

В нашем случае продольная сила постоянна по длине стержня BC , предельное значение площади

$$A = \frac{69,3 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 4,33 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 4,33 \text{ см}^2.$$

IV. Определяем удлинение стержня BC и величину вертикального перемещения точки C .

• *Удлинение стержня BC определяем* согласно закону Гука для абсолютных удлинений:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} = \frac{69,3 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4,33 \cdot 10^{-4}} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,6 \text{ мм}$$

• *Вертикальное перемещение точки C находим,* заменяя дугу (радиусом $L + \Delta L$) перпендикуляром C_2C_1 на первоначальное направление стержня (см. рис. 11а) Малая величина удлинения $\Delta L = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ по сравнению с длиной стержня $L = 2 \text{ м}$ допускает такую замену при весьма незначительной погрешности результата. Из треугольника CC_1C_2 находим, что вертикальное перемещение:

$$\Delta_{\text{верт}} = CC_1 = \frac{\Delta L}{\sin \alpha} = \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{0,866} = 1,85 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,85 \text{ мм}.$$

Задача 6

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 6).

Исходные данные:

Вал постоянного поперечного сечения диаметром d зашпелен одним концом и нагружен внешними скручивающими моментами $M_1 = 2 \text{ кНм}$, $M_2 = 1 \text{ кНм}$, $M_3 = 4,5 \text{ кНм}$ (рис. 15, а). Материал вала – сталь 3, модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, допускаемый относительный угол закручивания $[\varphi^\circ] = 0,3^\circ / \text{м}$.

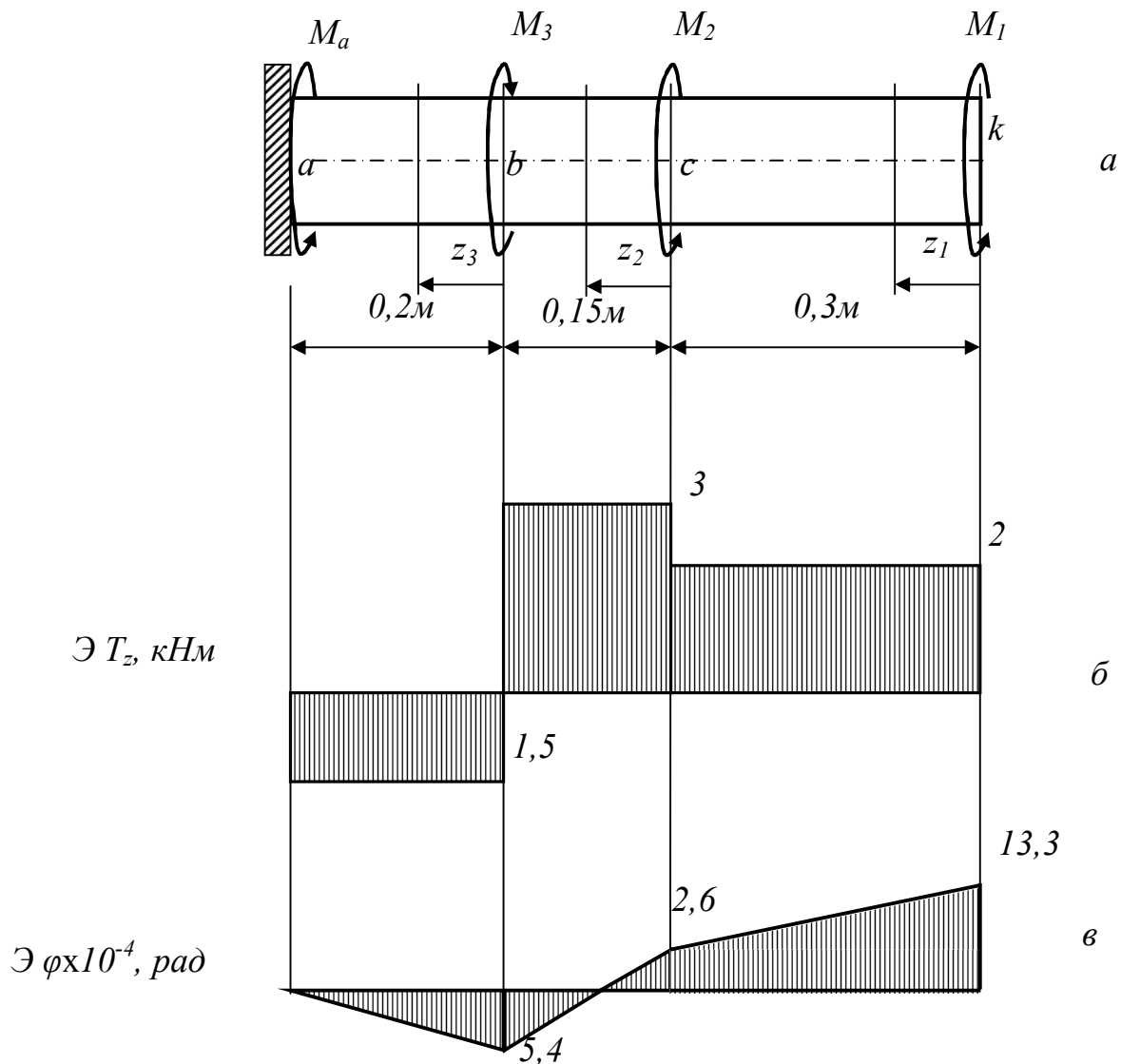


Рис.15

Решение.

I. Реактивный момент в заделке найдем из условия равновесия

$$M_a + M_1 + M_2 - M_3 = 0, \quad M_a = -M_1 - M_2 + M_3 = -2 - 1 + 4,5 = 1,5 \text{ кНм}.$$

Поскольку величина момента получена положительной, следовательно, направление момента выбрано верно.

II. Построение эпюры крутящих моментов T_z

Используется метод сечений. Вал разбивается на три силовых участка (рис. 15, а). Крутящий момент в каждом сечении определяется как алгебраическая сумма внешних скручивающих моментов, взятых по одну сторону от сечения. Правило знаков для моментов принимается произвольно. Расчет ведется со свободного конца вала.

Первый участок, $0 \leq z_1 \leq 0,3 \text{ м}$

$$T_{z_1} = M_1 = 2 \text{ кНм} = \text{const}.$$

Второй участок, $0 \leq z_2 \leq 0,15 \text{ м}$

$$T_{z_2} = M_1 + M_2 = 2 + 1 = 3 \text{ кНм} = \text{const}.$$

Третий участок, $0 \leq z_3 \leq 0,2 \text{ м}$

$$T_{z_3} = M_1 + M_2 - M_3 = 2 + 1 - 4,5 = -1,5 \text{ кНм} = \text{const}.$$

По полученным данным строится эпюра крутящих моментов T_z (рис. 15, б).

III. Расчет диаметра вала

На основании эпюры выбирается максимальное значение крутящего момента $T_{MAX} = 3 \text{ кНм}$. Определяется диаметр вала:

$$d' \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{MAX}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0576 \text{ м} \approx 58 \text{ мм} - \text{ из условия прочности};$$

ности;

$$d'' \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_{MAX}}{\pi \cdot G \cdot [\varphi^\circ]} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,3} \cdot \frac{180^\circ}{3,14}} = 0,0924 \text{ м} \approx 92 \text{ мм} -$$

из условия жесткости.

За окончательный принимается больший диаметр, т.е. $d = d'' = 92 \text{ мм}$.

IV. Построение эпюры абсолютных углов закручивания

Предварительно определяется полярный момент инерции сечения:

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,092^4}{32} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Эпюра углов закручивания строится по характерным сечениям, начиная от закрепленного торца (рис. 15, а).

Сечение a не поворачивается, т.е. угол поворота $\varphi_a = 0$.

Угол поворота сечения b относительно неподвижного сечения a равен углу закручивания на участке ab :

$$\varphi_b = \varphi_{ab} = \frac{T_{ab} \cdot l_{ab}}{G \cdot I_{\rho}} = \frac{-1,5 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 7 \cdot 10^{-6}} = -5,4 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Угол поворота сечения c относительно неподвижного сечения a складывается из угла поворота сечения b и угла закручивания на участке bc :

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \varphi_b + \varphi_{bc} = \varphi_b + \frac{T_{bc} \cdot l_{bc}}{G \cdot I_{\rho}} = \\ &= -5,4 \cdot 10^{-4} + \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0,15}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 7 \cdot 10^{-6}} = -5,4 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-4} = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ рад}. \end{aligned}$$

Угол поворота сечения k относительно неподвижного сечения a складывается из угла поворота сечения c и угла закручивания на участке ck :

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_c + \varphi_{ck} = \varphi_c + \frac{T_{ck} \cdot l_{ck}}{G \cdot I_{\rho}} = \\ &= 2,6 \cdot 10^{-4} + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 7 \cdot 10^{-6}} = 2,6 \cdot 10^{-4} + 10,7 \cdot 10^{-4} = 13,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}. \end{aligned}$$

По полученным значениям строится эпюра углов закручивания. Поскольку на участках нет распределенной скручивающей нагрузки, эпюра будет прямолинейной (рис. 15, в). Противоположные знаки на эпюре φ означают, что сечения поворачиваются относительно заделки в разные сто-

роны (направление можно определить по правилу знаков, принятому для T_z).

Задача 7

Схема «а» (рис.16)

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 7, схема «а»).

Исходные данные.

$$F = 15 \text{ кН}, \quad q = 10 \text{ кН/м}, \quad a_1 = 2 \text{ м}, \quad a_2 = 1 \text{ м}, \quad \sigma_T = 240 \text{ МПа}, \quad n_T = 1,5.$$

Решение.

I. Построим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .

- *Получим выражения для Q и M по участкам.* Заданная балка имеет два участка нагружения: по длине первого участка распределена равномерная нагрузка q , прекращение действия которой означает начало второго участка (см. рис. 16, а). На рис. z_1 и z_2 - координаты поперечных сечений первого и второго участков. Для каждого участка выбирается своя система координат.

$$I - \text{ый участок:} \quad 0 \leq z_1 \leq a_1$$

Рассматривая равновесие левой отсечённой части балки (см. рис. 16,б), запишем выражения для $Q(z_1)$ и $M(z_1)$

$$Q(z_1) = F - q z_1$$

Полученное выражение представляет собой уравнение наклонной прямой, следовательно, для её построения необходимо определить координаты двух точек. Мы выберем крайние точки.

$$z_1 = 0, \quad Q(z_1) = F = 15 \text{ кН}; \quad z_1 = a_1 = 2 \text{ м}, \quad Q(z_1) = F - q a_1 = 15 - 10 \cdot 2 = -5.$$

$$M(z_1) = F z_1 - q z_1 \cdot \frac{z_1}{2}.$$

Равнодействующая распределённой нагрузки q на участке z_1 равняется $q z_1$ и приложена в середине участка, то есть расстояние от силы $q z_1$ до сечения равно $z_1/2$. Данное выражение изгибающего момента представляет собой уравнение кривой второго порядка, имеющей экстремум в сечении с координатой z_0 , в котором $Q(z_0)=0$. Следовательно, для построения эпюры M требуются координаты трёх точек.

$$z_1=0, M(z_1)=0; \quad z_1=a_1=2\text{ м} \quad M(z_1)=F a_1 - \frac{q a_1^2}{2} = 15 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } z_1=z_0 \quad Q(z_0)=F - q z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{F}{q} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ м},$$

$$\text{тогда } M(z_0) = F z_0 - \frac{q z_0^2}{2} = 15 \cdot 1,5 - \frac{10 \cdot 1,5^2}{2} = 11,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$II - \text{ой участок:} \quad 0 \leq z_2 \leq a_2$$

Рассматривая равновесие левой части, отсечённой сечением с координатой z_2 (см. рис. 16, в), запишем выражения для $Q(z_2)$ и $M(z_2)$.

$$Q(z_2) = F - q a_1 = 15 - 10 \cdot 2 = -5 \text{ кН} = \text{const}.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой, параллельной оси эпюры.

$$M(z_2) = F(a_1 + z_2) - q a_1(0,5 a_1 + z_2).$$

В данном случае мы получили уравнение прямой, наклонной к оси эпюры. Для её построения определим координаты двух крайних точек.

$$z_2=0, \quad M(z_2) = F a_1 - 0,5 q a_1^2 = 15 \cdot 2 - 0,5 \cdot 10 \cdot 2^2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = a_2 = 1 \text{ м},$$

$$M(z_2) = F(a_1 + a_2) - q a_1(0,5 a_1 + a_2) = 15(2 + 1) - 10 \cdot 2(0,5 \cdot 2 + 1) = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

- Строим эпюры Q и M . Результат представлен на рис. 12, а.

II. Определяем максимальное нормальное напряжение в балке сложного поперечного сечения, уже рассмотренного в задаче 4.

Для этого следует воспользоваться формулой

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{176,66 \cdot 10^{-6}} = 0,06368 \cdot 10^9 \text{ Па} = 63,68 \text{ МПа} .$$

III. Определяем фактический коэффициент запаса прочности.

$$n_T^* = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{240}{63,68} = 3,77 .$$

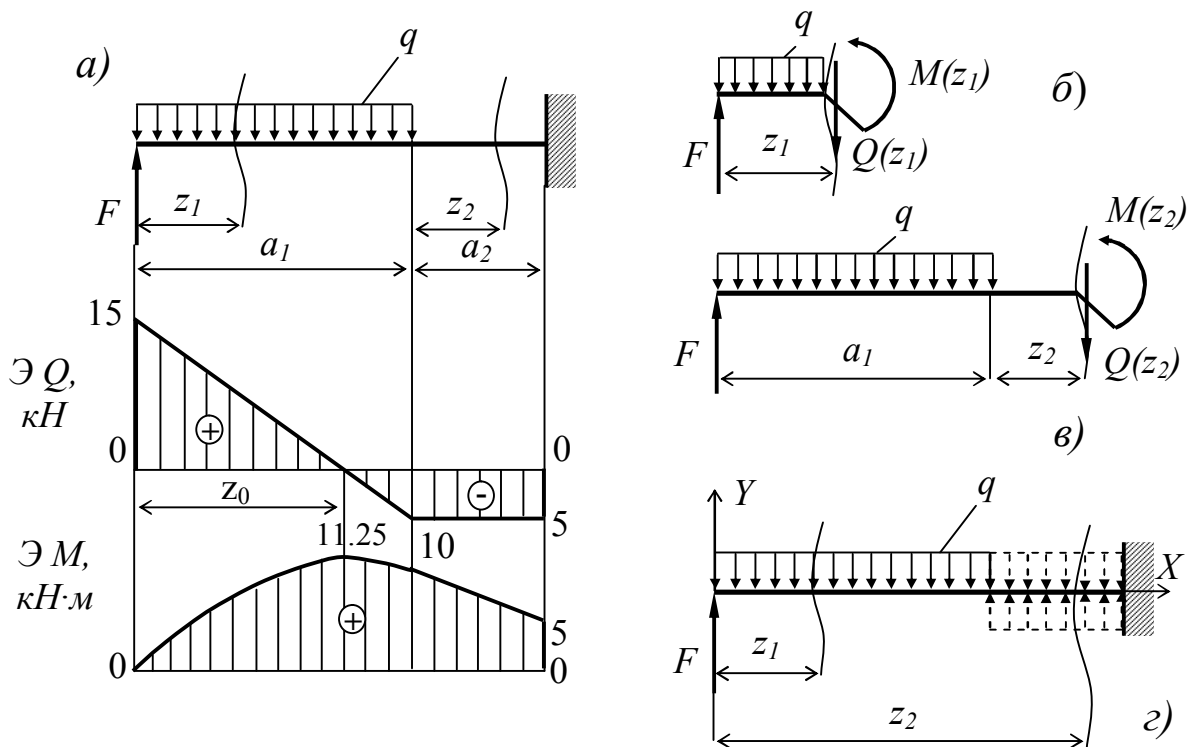


Рис. 16

Конструкция пригодна к эксплуатации, так как действительный запас прочности больше нормативного $n_T^* > n_T$, то есть $3,77 > 1,5$.

Задача 7

Схема «б» (рис.17)

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 7, схема в).

Исходные данные.

$$M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}, q = 16 \text{ кН/м}, a_1 = 1 \text{ м}, a_2 = 2 \text{ м}, \sigma_T = 240 \text{ МПа}, n_T = 1,5 .$$

Решение.

I. Построим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .

- *Определяем опорные реакции балки.* Заданная балка зафиксирована в двух сечениях с помощью шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опор (см. рис. 17). Характер прикладываемой нагрузки обуславливает необходимость определения только вертикальных реакций опор R_A и R_B , так как горизонтальная составляющая реакции в опоре A равна нулю ($H_A=0$).

$$\sum M_A = 0, R_B a_2 - q a_2 \frac{a_2}{2} - M = 0 \Rightarrow R_B = \frac{0,5 \cdot q a_2^2 + M}{a_2} = \frac{0,5 \cdot 16 \cdot 2^2 + 20}{2} = 26 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, -R_A a_2 - M + q a_2 \frac{a_2}{2} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{0,5 \cdot q a_2^2 - M}{a_2} = \frac{0,5 \cdot 16 \cdot 2^2 - 20}{2} = 6 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y = 0, R_A + R_B - q a_2; 6 + 26 - 32 = 0; 0 \equiv 0.$

Полученное тождество свидетельствует о правильности результатов.

- *Записываем уравнения для Q и M по участкам.* Для каждого участка выбирается своя система координат

I – ый участок: $0 \leq z_1 \leq a_1$

Рассматриваем равновесие левой части балки

$$Q(z_1) = 0, M(z_1) = M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м} = \text{const}.$$

II – ой участок: $0 \leq z_2 \leq a_2$

Рассматриваем равновесие правой части балки

$$Q(z_2) = -R_B + q z_2.$$

$$z_2 = 0, Q(z_2) = -R_B = -26 \text{ кН}; \quad z_2 = a_2, Q(z_2) = -R_B + q a_2 = -26 + 32 = 6 \text{ кН}$$

$$M(z_2) = R_B \cdot z_2 - 0,5 \cdot q z_2^2.$$

$$z_2 = 0, M(z_2) = 0;$$

$$z_2 = a_2 = 2 \text{ м}, M(z_2) = R_B \cdot a_2 - 0,5 \cdot q a_2^2 = 26 \cdot 2 - 0,5 \cdot 16 \cdot 2^2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $z_2 = z_0$ $Q(z_0) = -R_B + q z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{26}{16} = 1,625 \text{ м},$

тогда $M(z_0) = R_B z_0 - \frac{q z_0^2}{2} = 26 \cdot 1,625 - \frac{16 \cdot 1,625^2}{2} = 21,125 \text{ кН} \cdot \text{м}$

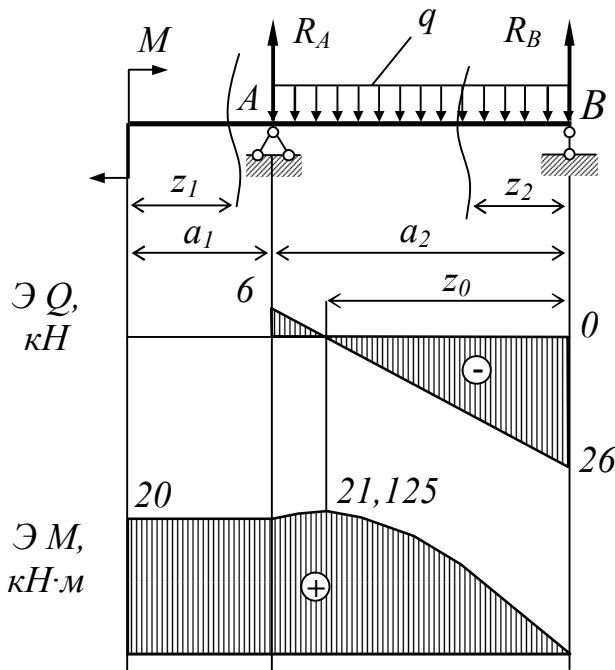


Рис. 17

• Строим эюры Q и M . Результат представлен на рис. 17

II. Подбираем сечения указанных в задании форм.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям для пластичных материалов:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

где

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}.$$

Тогда условие проектировочной за-

дачи:

$$W_X \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}.$$

Так как $M_{max} = 21,125 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис.17), то предельное значение осевого момента сопротивления:

$$W_X = \frac{21,125 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,132 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

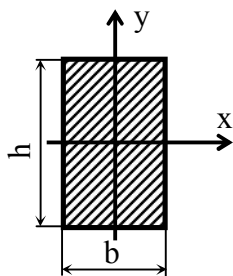


Рис. 18

• Подбираем прямоугольное сечение. Соотношение сторон $h/b = 2$ (рис.18).

Так как для прямоугольного сечения момент сопротивления относительно оси X (см. рис. 18)

$$W_X = bh^2/6 \text{ и по условию } b = h/2, \text{ то:}$$

$$h = \sqrt[3]{12W_X} = \sqrt[3]{12 \cdot 0,132 \cdot 10^{-3}} = 0,1166 \text{ м} = 11,66 \text{ см}, b = h/2 = 11,66/2 = 5,83 \text{ см},$$

$$A^{np} = h \cdot b = 0,1166 \cdot 0,0583 = 67,98 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

- Подбираем круглое сечение.

Для круглого сечения осевой момент сопротивления (рис. 19): $W_X = \pi \cdot D^3 / 32$, тогда

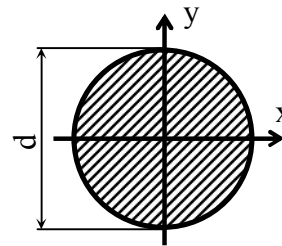


Рис. 19

$$D = \sqrt[3]{32W_X / \pi} = \sqrt[3]{32 \cdot 0,132 \cdot 10^{-3} / \pi} = 0,1104 \text{ м} = 11 \text{ см}$$

$$A^{kp} = \pi \cdot D^2 / 4 = \pi \cdot 0,1104^2 / 4 = 0,0096 \text{ м}^2.$$

- Подбираем кольцевое сечение. Отношение диаметров $\alpha = d/D = 0,8$ (рис. 20).

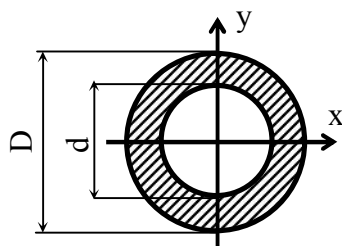


Рис. 20

Для кольцевого сечения осевой момент сопротивления: $W_X = \pi \cdot D^3 / 32 \cdot (1 - \alpha^4)$, тогда

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W_X}{\pi(1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,132 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (1-0,8^4)}} = 0,1316 \text{ м} = 13,16 \text{ см}$$

$$, d = D \cdot 0,8 = 0,1316 \cdot 0,8 = 0,1053 \text{ м} = 10,53 \text{ см},$$

$$A^{ku} = \pi \cdot D^2 \cdot (1 - \alpha^2) / 4 = \pi \cdot 0,1316^2 (1 - 0,8^2) / 4 = 48,97 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

- Подбираем сечение, состоящее из двух швеллеров.

В основе определения осевого момента сопротивления лежит соотношение

$$W_X = I_X / y_{max}$$

(см. решение задачи 4, пункт VI).

С учётом того, что рассматриваемое сечение сложное (см. решение задачи 4, пункт V), состоящее из двух равных частей (см. рис. 21)

$$W_X = \frac{I_X^{шв1} + I_X^{шв2}}{y_{max}} = \frac{2 \cdot I_X^{шв}}{y_{max}} = 2 \cdot \frac{I_X^{шв}}{y_{max}} = 2 \cdot W_X^{шв}.$$

По условию проектировочной задачи:

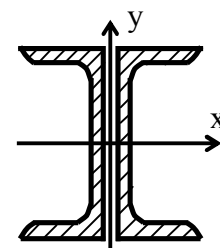


Рис. 21

$$W_X = 2W_X^{шв} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \Rightarrow W_X^{шв} \geq \frac{M_{max}}{2[\sigma]}, \text{ тогда предельное расчётное значение}$$

осевого момента сопротивления для одного швеллера:

$$W_X^{шв} = 0,066 \text{ м}^3 = 66 \text{ см}^3.$$

По таблице ГОСТ 8240-72 выбираем швеллер № 14 с ближайшим большим моментом сопротивления $^{зост}W_X^{шв} = 70,2 \text{ см}^3$. Следовательно, площадь всего

$$\text{сечения балки: } A = 2 \cdot ^{зост}A^{шв} = 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4} = 31,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 31,2 \text{ см}^2$$

- *Подбираем двутавровое сечение.*

Условие проектировочной задачи для балки с двутавровым сечением (рис. 22):

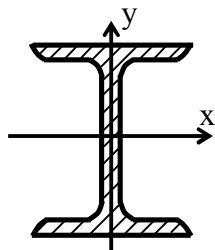


Рис.22

$$^{зост}W_X^{\partialв} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = 0,132 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

По таблице ГОСТ 8239-72 выбираем двутавровую балку № 18 с ближайшим значением момента сопротивления, значение которого отвечает условию проектировочной задачи

вочной задачи

$$^{зост}W_X^{\partialв} = 143 \text{ см}^3, \quad ^{зост}A^{\partialв} = 23,4 \text{ см}^2.$$

III. Оцениваем эффективность формы сечения.

Для чего сравниваем площади всех подобранных сечений.

$$\frac{A^{np}}{A^{\partialв}} = \frac{67.98}{23.40} = 2,91, \quad \frac{A^{kp}}{A^{\partialв}} = \frac{96.00}{23.40} = 4,10,$$

$$\frac{A^{кц}}{A^{\partialв}} = \frac{48.97}{23.40} = 2,09, \quad \frac{A^{шв}}{A^{\partialв}} = \frac{31.20}{23.40} = 1,33.$$

Наиболее эффективной формой сечения балки (балка с наименьшим весом) является двутавровое сечение, наименее эффективной – круглое сплошное сечение.

Задача 8

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 8).

Исходные данные Вал круглого сплошного сечения, изображенный на рис. 22, а, делает 500 оборотов в минуту и передает мощность, равную 75 кВт, $[\sigma] = 800 \text{ МПа}$.

Решение.

I. Определяем моменты, передаваемые каждым из шкивов на вал:

$$M = 60N / 2\pi n = 75 \cdot 60 / 500 \cdot 2 \cdot 3,14 = 1,433 \text{ кН} \cdot \text{м} = 1433 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

II. Троем эпюры крутящих моментов. Эпюра крутящих моментов, возникающих в сечениях вала, показана на рис. 22, б.

III. Определяем усилия T_1 , t_1 , T_2 , и t_2 , действующие на шкивы.

Шкив 1

$$M = (T_1 - t_1)D_1 / 2 = (2t_1 - t_1)D_1 / 2 = t_1 D_1 / 2,$$

так как $T_1 = 2t_1$ (рис.22, а). Следовательно,

$$t_1 = 2M / D_1 = 2 \cdot 1433 / 0,5 = 5732 \text{ Н} \text{ и } T_1 = 2t_1 = 11464 \text{ Н}.$$

Шкив 2:

$$M = (T_2 - t_2)D_2 / 2 = (2t_2 - t_2)D_2 / 2 = t_2 D_2 / 2.$$

Следовательно,

$$t_2 = 2M / D_2 = 2 \cdot 1433 / 0,3 = 9553 \text{ Н} \text{ и } T_2 = 2t_2 = 19106 \text{ Н}.$$

IV. Определяем вертикальные и горизонтальные составляющие нагрузки, действующей со стороны шкивов на вал:

$$P_{1y} = (T_1 + t_1) \sin \alpha_1 = (11464 + 5732) \sin 60^\circ = 14892 \text{ Н};$$

$$P_{1z} = (T_1 + t_1) \cos \alpha_1 = (11464 + 5732) \cos 60^\circ = 8598 \text{ Н};$$

$$P_{2y} = (T_2 + t_2) \sin \alpha_2 = (19106 + 9553) \sin 45^\circ = 20202 \text{ Н};$$

$$P_{2z} = (T_2 + t_2) \cos \alpha_2 = (19106 + 9553) \cos 45^\circ = 20202 \text{ Н}.$$

Силы P_{1y} , P_{1z} , P_{2y} и P_{2z} показаны на рис.22, в.

На рис.22, з, д показаны соответственно вертикальные и горизонтальные силы, действующие на вал.

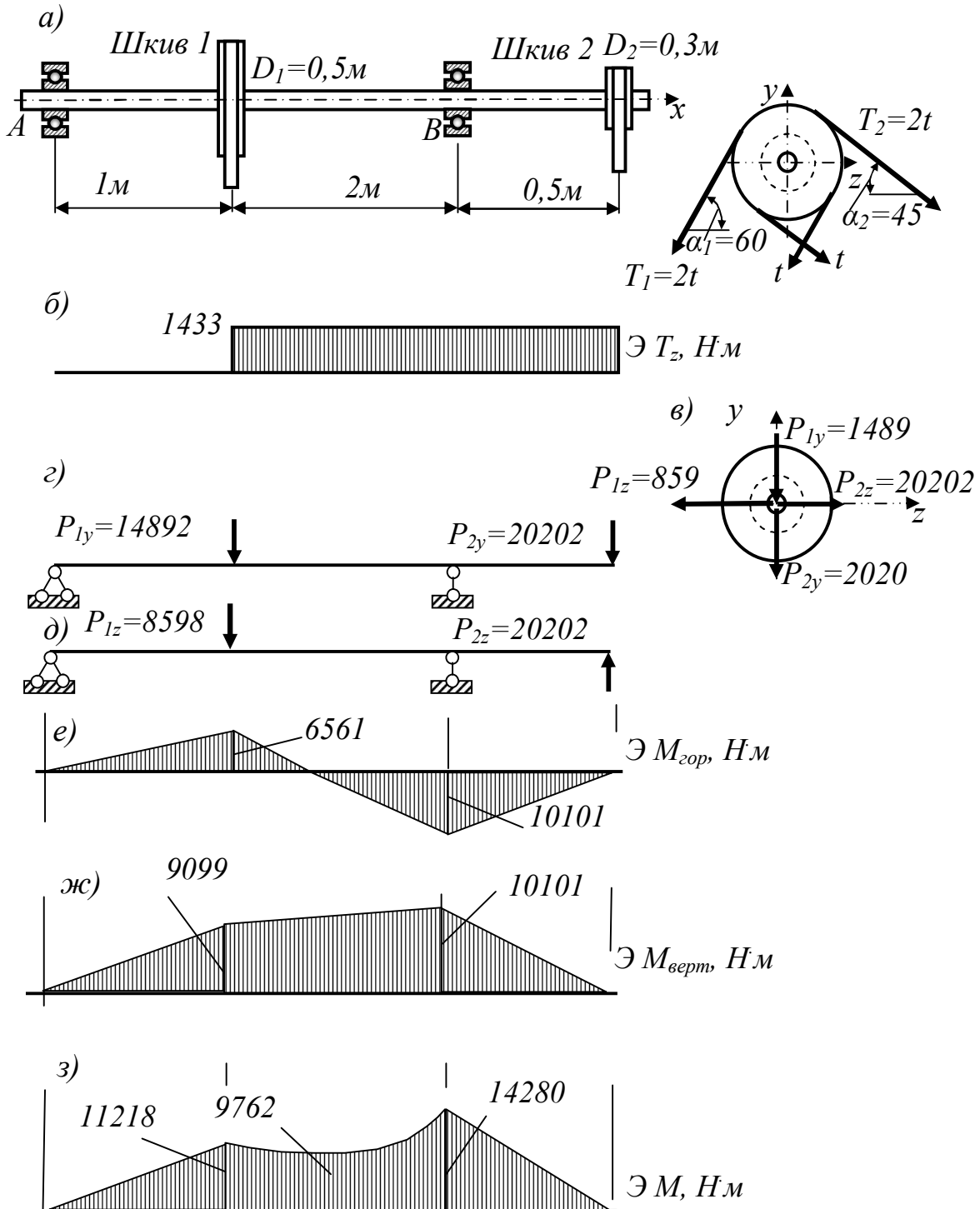


Рис.22

V. Для определения опорных реакции подшипников вала составим выражения сумм моментов всех вертикальных и сумм моментов всех горизонтальных сил относительно опор A и B :

$$\sum M_B^{верт} = A_y \cdot 3 - 14892 \cdot 2 + 20202 \cdot 0,5 = 3A_y - 19683 = 0,$$

откуда

$$A_y = 19683/3 = 6561H,$$

$$\sum M_A^{верт} = 14892 - B_y \cdot 3 + 20202 \cdot 3,5 = -3B_y + 85599 = 0,$$

откуда

$$B_y = 85599/3 = 28533H,$$

$$\sum M_B^{гор} = A_z \cdot 3 - 8598 \cdot 2 - 20202 \cdot 0,5 = 3A_z - 27297 = 0,$$

откуда

$$A_z = 27297/3 = 9099H,$$

$$\sum M_A^{гор} = 8598 \cdot 1 + B_y \cdot 3 - 20202 \cdot 3,5 = 3B_y - 62109 = 0,$$

откуда

$$B_z = 62109/3 = 20703H.$$

Эпюры изгибающих моментов M_z и M_y , построенные соответственно от вертикальных и горизонтальных сил, показаны на рис.22, *е*, *ж*.

VI. Вычисляем значения полных изгибающих моментов M в сечениях вала:

при $x = 1$ м

$$M = \sqrt{6561^2 + 9099^2} = 11217,78H \cdot м;$$

при $x = 2$ м

$$M = \sqrt{(6561 \cdot 2 - 14892)^2 + (9099 \cdot 2 - 8598)^2} = 9762H \cdot м;$$

при $x = 3$ м

$$M = \sqrt{10101^2 + 10101^2} = 14280H \cdot м.$$

Эпюра M построена на рис. 22, *з*.

VII. Опасным сечением вала является опорное сечение B , так как в нем одновременно действуют наибольший изгибающий момент $M = 14280 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и наибольший крутящий момент $T_z = 1433 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Определяем значения приведенных моментов по третьей теории прочности:

$$M_{III} = \sqrt{M^2 + T_z^2} = \sqrt{14280^2 + 1433^2} = 14350 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

VIII. Приняв расчетный момент равным $14350 \text{ Н}\cdot\text{м}$, определяем необходимый момент сопротивления вала:

$$W_{III} = \frac{M_{III}}{[\sigma]} = \frac{14350}{800 \cdot 10^6} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

но для вала сплошного сечения $W = \pi d^3 / 32$, следовательно,

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5}}{\pi}} = 0,057 \text{ м} = 57 \text{ мм}.$$

Диаметр вала принимаем равным 58 мм .

Задача 9 (рис. 23)

Постановку задачи см. в практической части задания к контрольной работе (задача 9).

Исходные данные.

$F = 400 \text{ кН}$, $L = 3 \text{ м}$, $E = 200 \text{ ГПа}$, $\mu = 1$ (μ – коэффициент, зависящий от условий закрепления стержня, табличная величина).

Решение.

I. Находим размеры поперечного сечения стержня при допуске напряжении на центральное сжатие $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, пользуясь методом последовательных приближений.

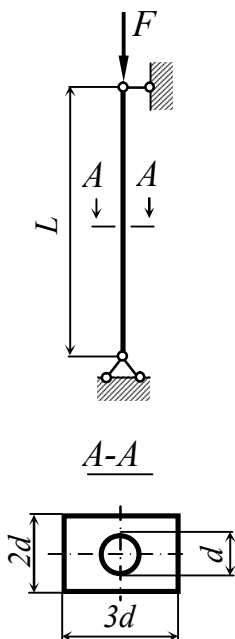


Рис. 23

• Записываем выражение для определения площади поперечного сечения стержня из условия устойчивости.

Условие устойчивости $\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$,

тогда $A = \frac{F}{\varphi[\sigma]}$, (9.1)

где φ - коэффициент уменьшения допускаемого напряжения на сжатие, или коэффициент продольного изгиба.

В расчётной формуле (9.1) имеются две неизвестные величины – коэффициент φ и искомая площадь A . Поэтому при подборе сечения необходимо использовать метод последовательных приближений.

- *Для упрощения расчётов выполним вспомогательные преобразования.*

Так как проектируемое сечение сложное, минимальный момент инерции (потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жёсткости) определяется следующим образом

$$I_{\min} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3d(2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1,95d^4.$$

Площадь поперечного сечения

$$A = 2d \cdot 2d - \frac{\pi d^2}{4} = 5,21d^2,$$

тогда $d = 0,44\sqrt{A}$. (9.2)

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,95d^4}{5,21d^2}} = 0,61d$$
$$i_{\min} = 0,61d \quad (9.3)$$

- *Выполняем первое приближение.* В первом приближении коэффициент продольного изгиба обычно принимают $\varphi_1 = 0,5$, тогда

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,005 \text{ м}^2.$$

Используя соотношения (8.2) и (8.3), получим

$$d_1 = 0,44\sqrt{0,005} = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,1 \text{ см},$$
$$i_{\min 1} = 0,61d_1 = 0,61 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2} = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тогда расчётная гибкость колонны

$$\lambda_1 = \frac{\mu L}{i_{\min 1}} = \frac{1 \cdot 3}{1,89 \cdot 10^{-2}} = 159.$$

По таблице (/2/, табл. X.1, с. 233) определяем значение коэффициента φ'_1 , соответствующего гибкости $\lambda_1 = 159$

$$\lambda = 150 \rightarrow \varphi = 0,32$$
$$\lambda = 160 \rightarrow \varphi = 0,29$$

Путём линейной интерполяции:

$$\varphi'_1 = 0,32 - \frac{0,32 - 0,29}{10} \cdot 9 = 0,293.$$

Проверим выполнение условия устойчивости в первом приближении. Для этого вычислим рабочие напряжения первого приближения

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,005} = 80000 \cdot 10^3 \text{ Па} = 80 \text{ МПа}.$$

Затем определим допускаемые напряжения по устойчивости в первом приближении:

$$[\sigma_y] = \varphi'_1 [\sigma] = 0,293 \cdot 160 = 46,88 \text{ МПа}.$$

Из приведённых вычислений следует, что условие устойчивости не выполняется, так как

$$\sigma_1 > [\sigma_y] \quad (80 \text{ МПа} > 46,88 \text{ МПа}).$$

В этом случае перенапряжение составляет

$$\Delta \sigma_1 = \frac{\sigma_1 - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{80 - 46,88}{46,88} \cdot 100\% = 70,65\%,$$

что недопустимо. Следовательно, необходимо второе приближение.

- *Выполняем второе приближение.* Во втором приближении коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,293}{2} = 0,396.$$

Тогда площадь сечения

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,396 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,0063 \text{ м}^2.$$

Диаметр: $d_2 = 0,44 \sqrt{0,0063} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,5 \text{ см},$

радиус инерции: $i_{\min 2} = 0,61 d_2 = 0,61 \cdot 3,5 \cdot 10^{-2} = 2,135 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Гибкость колонны

$$\lambda_2 = \frac{\mu L}{i_{\min 2}} = \frac{1 \cdot 3}{2,135 \cdot 10^{-2}} = 140,5.$$

Определяем значение коэффициента φ_2' , соответствующего этой гибкости.

$$\lambda = 140 \rightarrow \varphi = 0,36$$

$$\lambda = 150 \rightarrow \varphi = 0,32$$

$$\varphi_2' = 0,36 - \frac{0,36 - 0,32}{10} \cdot 0,5 = 0,358.$$

Проверим выполнение условия устойчивости во втором приближении. Для этого вычислим рабочие напряжения второго приближения:

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,0063} = 63492 \cdot 10^3 \text{ Па} = 63,492 \text{ МПа}.$$

Затем определим допускаемые напряжения по устойчивости во втором приближении:

$$[\sigma_y] = \varphi_2' [\sigma] = 0,358 \cdot 160 = 57,28 \text{ МПа}.$$

Из приведённых вычислений следует, что условие устойчивости не выполняется, так как:

$$\sigma_2 > [\sigma_y] \quad (63,492 \text{ МПа} > 57,28 \text{ МПа}).$$

В этом случае перенапряжение составляет

$$\Delta\sigma_2 = \frac{\sigma_2 - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{63,492 - 57,28}{57,28} \cdot 100\% = 10,84\%,$$

что опять недопустимо, так как перенапряжение превышает 5%. Следовательно, необходимо третье приближение.

• *Выполняем третье приближение.* В третьем приближении коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,396 + 0,358}{2} = 0,377.$$

Тогда площадь сечения

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,377 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,0066 \text{ м}^2.$$

Диаметр $d_3 = 0,44 \sqrt{0,0066} = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,6 \text{ см},$

Гибкость колонны

$$\lambda_3 = \frac{\mu L}{i_{\min_3}} = \frac{1 \cdot 3}{2,196 \cdot 10^{-2}} = 136,6.$$

Определяем значение коэффициента φ'_3 , соответствующего этой гибкости.

$$\lambda = 130 \rightarrow \varphi = 0,40$$

$$\lambda = 140 \rightarrow \varphi = 0,36$$

$$\varphi'_3 = 0,40 - \frac{0,40 - 0,36}{10} \cdot 6,6 = 0,374.$$

Проверим выполнение условия устойчивости в третьем приближении. Для этого вычислим рабочие напряжения третьего приближения:

$$\sigma_3 = \frac{F}{A_3} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,0066} = 60606 \cdot 10^3 \text{ Па} = 60,606 \text{ МПа}.$$

Затем определим допускаемые напряжения по устойчивости в третьем приближении:

$$[\sigma_y] = \varphi'_3 [\sigma] = 0,374 \cdot 160 = 59,84 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_3 > [\sigma_y] \quad (60,606 \text{ МПа} > 59,84 \text{ МПа}).$$

Из чего следует, что условие устойчивости не выполняется, однако перенапряжение составляет:

$$\Delta \sigma_3 = \frac{\sigma_3 - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{60,606 - 59,84}{59,84} \cdot 100\% = 1,28\% < 5\%.$$

что допустимо, так как оно не превышает 5%. То есть, окончательно принимаем:

$$d = 0,036 \text{ м} = 36 \text{ мм}$$

следовательно, сечение имеет размеры 72×108 см,

$$I_{\min} = 1,95 d^4 = 1,95 \cdot 3,6^4 = 327,5 \text{ см}^4,$$

$$\lambda = 136,6.$$

II. Находим величину критической силы.

Так как $\lambda > \lambda_{пред}$, то есть $136,6 > 100$, то используем формулу Эйлера для определения критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 327,5 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 3)^2} = 718,29 \cdot 10^3 \text{ Н} = 718,29 \text{ кН}.$$

III. Находим коэффициент запаса устойчивости.

$$k_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{718,29}{400} = 1,8.$$

Список литературы

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики в 2 томах.– СПб: Лань, 2008.– 736 с.
2. Степин П.А. Сопроотивление материалов: Учебник . 11-е изд., стер.–СПб.: Издательство «Лань», 2010.– 320с.
3. Теория механизмов и машин: курс лекций /Г.А. Тимофеев.– М.: Высшее образование, 2009.– 352с.

4. Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами / Под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского. Учеб. пособие: Для вузов.– 2-е изд., переаб. и доп. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003.– 632с.

5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов.-11-е изд., стереотип.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.– 592с.

6. Теория механизмов и механика машин: Учеб. для вузов/К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.; Под. ред. К. В. Фролова.– 4-е изд., испр.– М.: Высш. шк., 2003.– 496с.

7. Буланов Э.А. Решение задач по сопротивлению материалов/ Э.А. Буланов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний , 2010.–215с.

Под общей редакцией
Артамонова Владимира Сергеевича
*доктора военных наук, доктора технических наук, профессора,
заслуженного работника высшей школы Российской Федерации,
лауреата премии Правительства Российской Федерации
в области науки и техники*

Антипин Максим Иванович
кандидат технических наук

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
ДЛЯ СЛУШАТЕЛЕЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ
280705 «ПОЖАРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ»**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор Л. Г. Сухоиванова
Технический редактор В. Н. Виноградов

Ответственный за выпуск О. Н. Кольцова

Подписано в печать 10.08.2011

Формат 60x84 ¹/₁₆

Печать офсетная. Объем 3,9 п.л.

Тираж 50 экз.

Отпечатано в Санкт-Петербургском университете ГПС МЧС России
196105, Санкт-Петербург, Московский пр., 149